Delta-unknotting numbers and the Conway polynomials of knots

牧野 孝
神戸大学大学院自然科学研究科

平成 16 年 2 月 2 日

Preface

knot の Conway 多項式は, 定数項が 1 で偶数次のみに非零の係数をもつという特徴がある. また, 定数項が 1 で偶数次のみに非零の係数をもつ多項式について, これを Conway 多項式としてもつ unknotting number 1 の knot の構成はよく知られている。さらに, 2 次の係数を Δ-unknotting number とする knot の構成が Hitoshi Murakami により "Delta-unknotting number and the Conway polynomial" (Kobe J. Math. 10 (1993), 17–22) で, 与えられている. こうした結果の拡張として, 定数項が 1 で 2 次の係数が正でそれぞれ異なるような n 個の多項式に対して, それらを Conway 多項式 とし，unknotting number が 1 で Δ-unknotting number が 2 次の係数に一致し, さらに, それらの knot のうちの任意の 2 つについての Δ-Gordian distance が 2 次の係数の差となるような, n 個の knot の構成を与える.

Contents

1 Preliminary

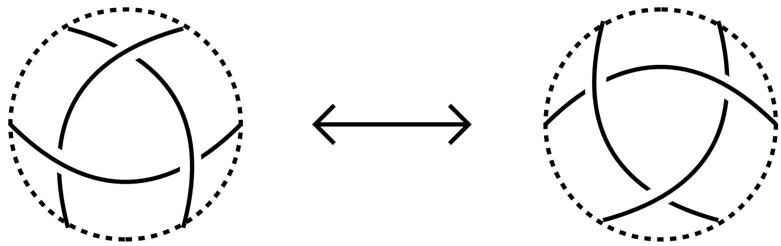
Theorem 1.1 ([3, Louis H. Kauffman]). *μ components の link L について, 次の 2 条件をみたす.*

(1) *$\mu-2\geq m$ をみたす m について, $a_m(L)=0$ である.*

(2) *μ と偶奇を同じくする m について, $a_m(L)=0$ である.*

特に, L が knot のときは, $a_0(L)=1$ である.

Definition 1.2 ([6, H. Murakami and Y. Nakanishi]). 次図で示される *knot diagram* の *local move* を Δ*-unknotting operation* という.



Theorem 1.3 ([6]). 任意の *knot* は, 有限回の Δ*-unknotting operation* を施すことによって *trivial knot* になる.

Corollary 1.4. 任意の 2 つの *knots* K, K' について, K は, 有限回の Δ*-unknotting operation* を施すことによって, K' になる.

Definition 1.5. *knot* K の Δ*-unknotting number* とは, K を *trivial knot* にするのに必要な Δ*-unknotting operation* の最小の回数をいう. これを $u^{\Delta}(K)$ と表す.

Definition 1.6. *knot* K から *knot* K' への Δ-*Gordian distance* とは, K を K' にするのに必要な Δ-*unknotting operation* の最小の回数をいう. これを $d_G^{\Delta}(K, K')$ と表す.

Theorem 1.7 ([7, M. Okada]). 2 つの *knot* K, K' を $d_G^{\Delta}(K, K') = 1$ となるようなものとするとき,

$$|a_2(K) - a_2(K')| = 1.$$

Corollary 1.8 ([7]). 任意の 2 つの *knot* K と K' に対して, $d_G^{\Delta}(K, K') - |a_2(K) - a_2(K')|$ は非負の偶数である.

したがって, $u^{\Delta}(K) - |a_2(K)|$ もまた非負の偶数である.

2 Construction of knot for the Conway polynomial

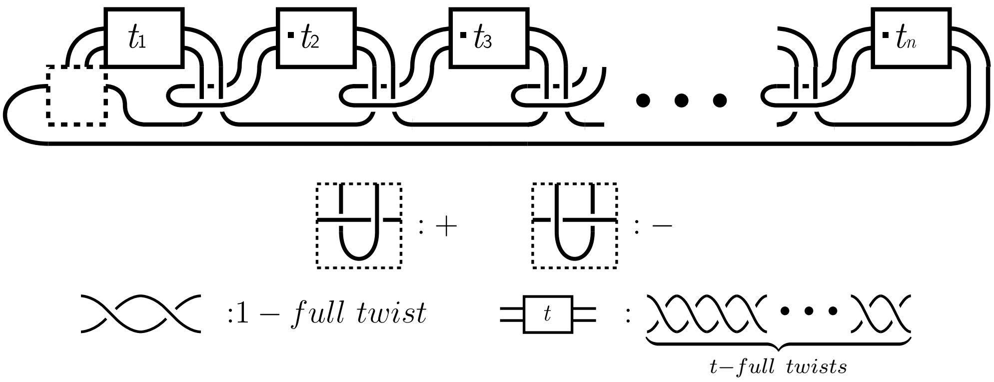
Theorem 1.1 より, knot K の Conway 多項式は

$$1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots + a_{2m} z^{2m} \quad (m \in \mathbf{N}, a_i \in \mathbf{Z})$$

で表されるが, 逆にこのように表される任意の多項式に対して, その多項式を Conway 多項式としてもつような knot が存在することが示されている.

Theorem 2.1 ([5, H. Murakami]). 任意の多項式
$f(z) = 1 + b_1 z^2 + b_2 z^4 + \cdots + b_n z^{2n}$ $(n \in \mathbf{N}, b_i \in \mathbf{Z})$ に対して, $b_1 \neq 0$ のときは, $u^{\Delta}(K) = |b_1|$ かつ $\nabla_K(z) = f(z)$ となる K が, $b_1 = 0$ のときは, $u^{\Delta}(K) = 2$ かつ $\nabla_K(z) = f(z)$ となる K が存在する.

この証明にあたり, 以下のような knot を考えている.

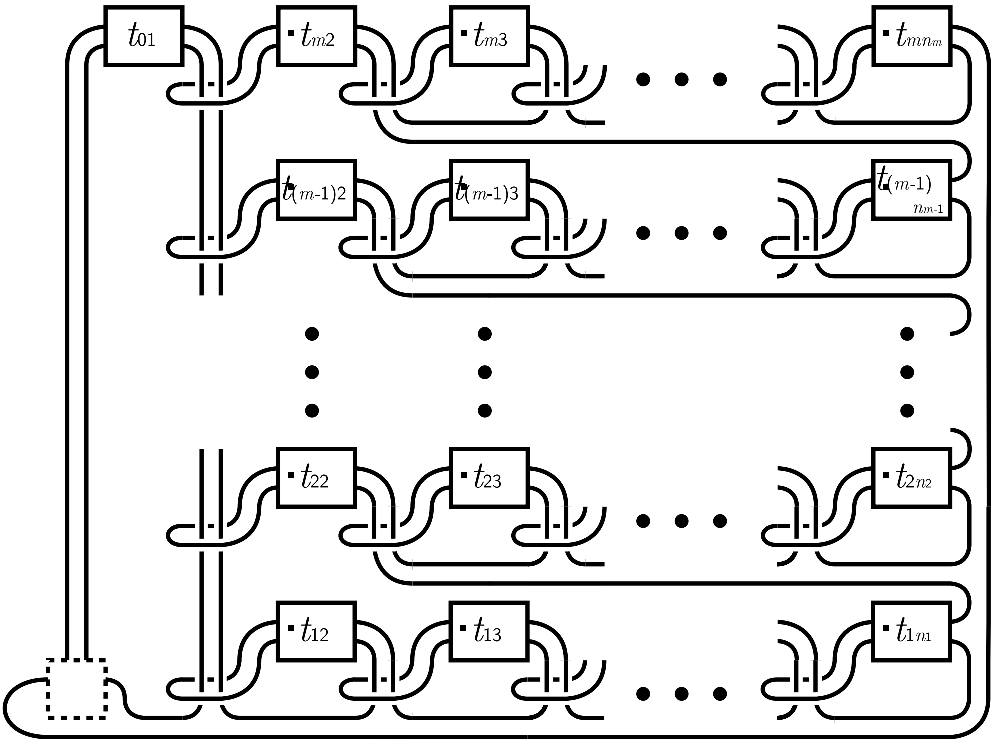


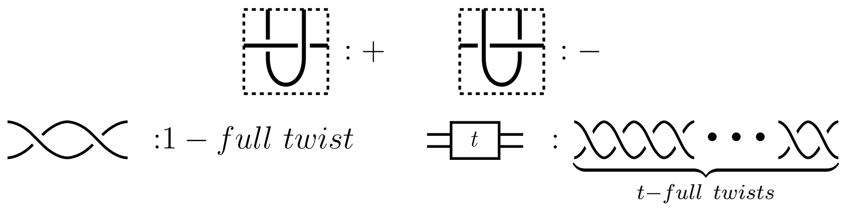
$: K_{\pm}(t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n)$

$$\nabla_{K_{\pm}(t_1,t_2,t_3,\cdots,t_n)} = 1 \pm \sum_{i=1}^{n-1} (t_i + 1)(-z^2)^i \pm t_n(-z^2)^n$$

3　Main Theorem

以下のような knot を考える.





この knot を

$$K_{\pm}(t_{01},(t_{12},t_{13},\cdots,t_{1n_1}),(t_{22},t_{23},\cdots,t_{2n_2}),\cdots,(t_{m2},t_{m3},\cdots,t_{mn_m}))$$

と表すことにする.

この knot の Conway 多項式を計算すると,

$$\nabla_{K_{\pm}(t_{01},(t_{12},t_{13},\cdots,t_{1n_1}),(t_{22},t_{23},\cdots,t_{2n_2}),\cdots,(t_{m2},t_{m3},\cdots,t_{mnm}))}$$
$$=1\mp(t_{01}+m)z^2\pm\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=2}^{n_j-1}(t_{ji}+1)(-z^2)^i+t_{jn_j}(-z^2)^{n_j}\right)$$

となる.

この結果から, 次のような Theorem が導き出される.

Theorem 3.1. 任意の m 個の多項式
$\nabla_1(z) = 1 + z^2 + s_{12}z^4 + \cdots + s_{1l_1}z^{2l_1}$,
$\nabla_2(z) = 1 + 2z^2 + s_{22}z^4 + \cdots + s_{2l_1}z^{2l_2}$,
$\vdots$
$\nabla_j(z) = 1 + jz^2 + s_{j2}z^4 + \cdots + s_{jl_j}z^{2l_j}$,
$\vdots$
$\nabla_m(z) = 1 + mz^2 + s_{m2}z^4 + \cdots + s_{ml_m}z^{2l_m} \quad (s_{ji}\in\mathbf{Z})$
に対して, 次の 3 条件をみたす *knots* $K_1, K_2, \cdots, K_m$ が存在する.

(1) $\nabla_{K_j}(z) = \nabla_j(z)$,

(2) $u^{\Delta}(K_j) = j$,

(3) $d_G^{\Delta}(K_j, K_{j'}) = |j - j'|$.

Proof. $l := \max\{l_1, l_2, \cdots, l_m\}$ とし,
$1\leq{}^{\forall}j\leq m$ について,
$s_{jk} = 0 \quad (l_j < k\leq l)$
とする.
このとき, 以下の 2 条件を満たす $K_1, K_2, \cdots, K_m$ が一例となる.

(a) $K_1 = K_-(0, ((-1)s_{12}-1, (-1)^2 s_{13}-1, \cdots, (-1)^{l-2}s_{1(l-1)}-1, (-1)^{l-1}s_{1l}))$.

(b) $K_j = K_-(0, (*_1), (*_2), \cdots, (*_j))$
$\Rightarrow K_{j+1} = K_-(0, (*_1), (*_2), \cdots, (*_j),$
$((s_{j2} - s_{(j+1)2}) - 1, -(s_{j3} - s_{(j+1)3}) - 1,$
$\cdots, (-1)^{l-1}(s_{j(l-1)}-s_{(j+1)(l-1)})-1, (-1)^l(s_{jl}-s_{(j+1)l})))$.

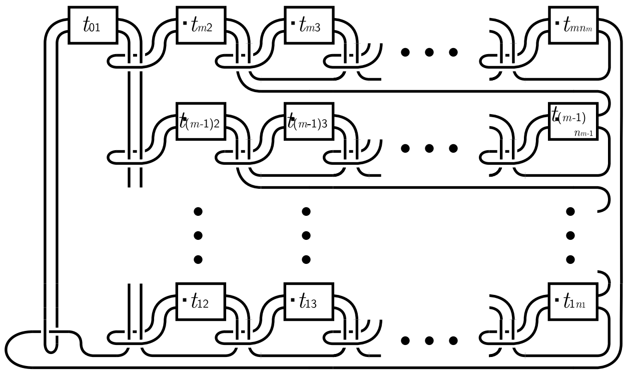
先ほどの結果より,
$t_{01} = 1,\ t_{12} = (-1)s_{12} - 1,\ t_{13} = (-1)^2 s_{13} - 1,$
$\cdots,\ t_{1(l-1)} = (-1)^{l-2}s_{1(l-1)} - 1,\ t_{1l} = (-1)^{l-1}s_{1l}$
$h\geq 1$ について,
$t_{(h+1)2} = (-1)^2(s_{h2} - s_{(h+1)2}) - 1,\ t_{(h+1)3} = (-1)^3(s_{h3} - s_{(h+1)3} - 1),\ \cdots,$
$t_{(h+1)(l-1)} = (-1)^{l-1}(s_{h(l-1)} - s_{(h+1)(l-1)}) - 1,\ t_{(h+1)l} = (-1)^l(s_{hl} - s_{(h+1)l})$
とおくと,

$$\nabla_{K_1}(z) \quad = \quad 1 + (t_{01} + 1)z^2 - \left(\sum_{i=2}^{l-1}(t_{1i} + 1)(-z^2)^i + t_{1l}(-z^2)^l\right)$$

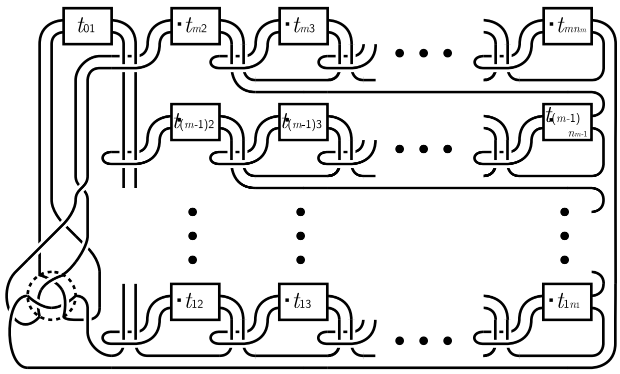
$$
\begin{aligned}
&= 1+(0+1)z^2\\
&\quad -\left(\sum_{i=2}^{l-1}(((-1)^{i-1}s_{1i}-1)+1)(-z^2)^i+(-1)^{l-1}s_{1l}(-z^2)^l\right)\\
&= 1+z^2+s_{12}z^4+\cdots+s_{1l}z^{2l}\\
&\quad (s_{1k}=0\quad (l_1<k\leq l)\quad \text{より},)\\
&= 1+z^2+s_{12}z^4+\cdots+s_{1l_1}z^{2l_1}.
\end{aligned}
$$

$\nabla_{K_j}(z)=1+jz^2+s_{j2}z^4+\cdots+s_{jl_j}z^{2l_j}$ であると仮定する.

$$
\begin{aligned}
\nabla_{K_{j+1}}(z) &= 1+(t_{01}+(j+1))z^2\\
&\quad -\sum_{h=1}^{j+1}\left(\sum_{i=2}^{l-1}(t_{hi}+1)(-z^2)^i+t_{hl}(-z^2)^l\right)\\
&= 1+(t_{01}+j)z^2-\sum_{h=1}^{j}\left(\sum_{i=2}^{l-1}(t_{hi}+1)(-z^2)^i+t_{hl}(-z^2)^l\right)\\
&\quad +z^2-\left(\sum_{i=2}^{l-1}(t_{(j+1)i}+1)(-z^2)^i+t_{(j+1)l}(-z^2)^l\right)\\
&= \nabla_{K_j}(z)+z^2-\sum_{i=2}^{l-1}(t_{(j+1)i}+1)(-z^2)^i-t_{(j+1)l}(-z^2)^l\\
&= 1+jz^2+s_{j2}z^4+\cdots+s_{jl_j}z^{2l_j}\\
&\quad +z^2-\sum_{i=2}^{l-1}((-1)^i(s_{ji}-s_{(j+1)i})-1)+1)(-z^2)^i\\
&\quad -(-1)^l(s_{jl}-s_{(j+1)l})(-z^2)^l\\
&\quad (s_{jk}=0\quad (l_j<k\leq l)\quad \text{とするので},)\\
&= 1+jz^2+s_{j2}z^4+\cdots+s_{jl}z^{2l}\\
&\quad +z^2-\sum_{i=2}^{l-1}(-1)^i(s_{ji}-s_{(j+1)i})(-z^2)^i\\
&\quad -(-1)^l(s_{jl}-s_{(j+1)l})(-z^2)^l\\
&= 1+(j+1)z^2+s_{(j+1)2}z^4+\cdots+s_{(j+1)l}z^{2l}\\
&\quad (s_{(j+1)k}=0\quad (l_{j+1}<k\leq l)\quad \text{より},)\\
&= 1+(j+1)z^2+s_{(j+1)2}z^4+\cdots+s_{(j+1)l_{j+1}}z^{2l_{j+1}}.
\end{aligned}
$$



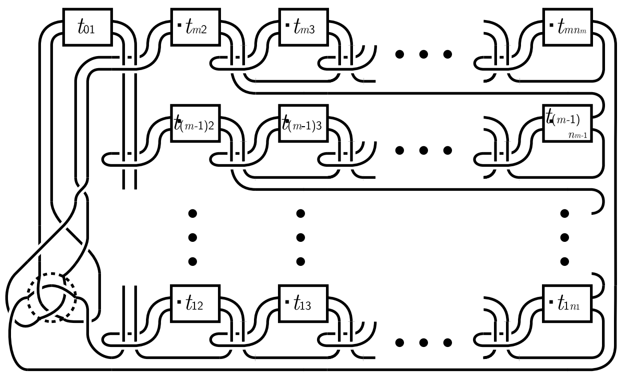
$\cong$



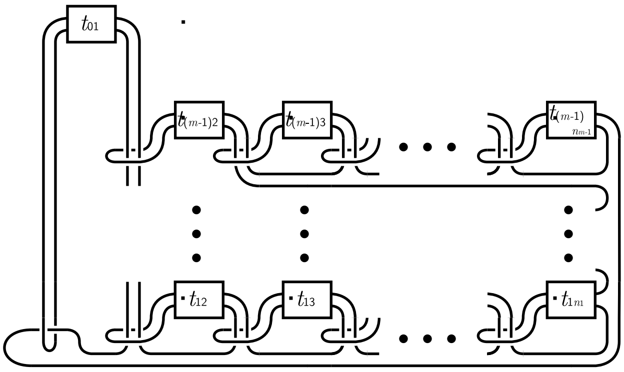
$\downarrow$

Δ-unknotting operation

$\downarrow$



$\cong$



$t_{01}=0$ のときを考えているので, K_j にこの操作を繰り返していけば, 結局 Δ-unknotting operation を j 回行うことで, trivial knot になる.
よって,

$$u^{\Delta}(K_j)\leq j.$$

また, Corollary 1.8 より, $u^{\Delta}(K_j)-a_2(K_j)$ すなわち $u^{\Delta}(K_j)-j$ は非負の偶数である. したがって,

$$u^{\Delta}(K_j)\geq j.$$

ゆえに,

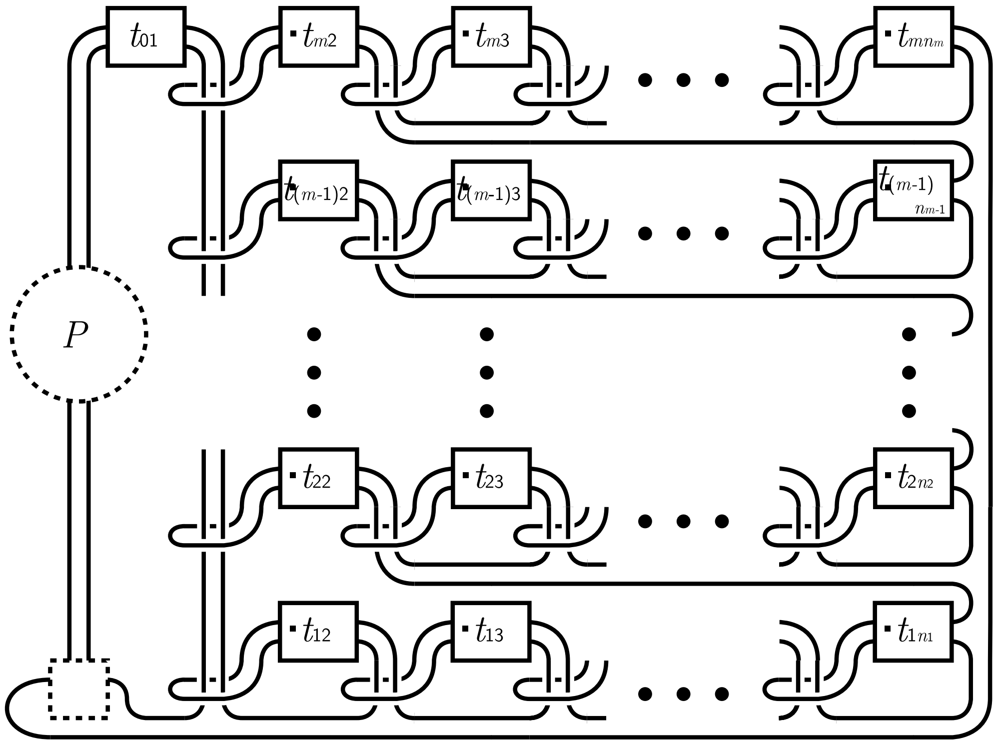
$$u^{\Delta}(K_j)=j.$$

さらに, $d_G^{\Delta}(K_j,K_{j'})<|j-j'|$ と仮定すると,
$j<j'$ として,
$u^{\Delta}(K_j)+d_G^{\Delta}(K_j,K_{j'})<j+|j-j'|=j'$.
これは, $u^{\Delta}(K_j)+d_G^{\Delta}(K_j,K_{j'})\geq u^{\Delta}(K_{j'})=j'$ であることに矛盾.
また, knot の構成の仕方から $d_G^{\Delta}(K_j,K_{j'})\leq j'-j=|j-j'|$.
$j>j'$ のときも同様である.
ゆえに,

$$d_G^{\Delta}(K_j,K_{j'})=|j-j'|.$$

□

次に, 以下のような knot を考える.

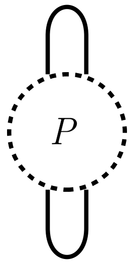


これを,

$$K_{\pm}^{P}(t_{01},(t_{12},t_{13},\cdots,t_{1n_1}),(t_{22},t_{23},\cdots,t_{2n_2}),\cdots,(t_{m2},t_{m3},\cdots,t_{mn_m}))$$

と表すことにする.

さらに, 以下の knot を P^* と表すことにする.



: P^*

$K_{\pm}(t_{01},(t_{12},t_{13},\cdots,t_{1n_1}),\cdots,(t_{m2},t_{m3},\cdots,t_{mn_m}))$ の計算から以下のことがわかる.

Corollary 3.2. $\nabla_{P^*}(z)=1$ ならば,

$$\nabla_{K_{\pm}^{P}(t_{01},(t_{12},t_{13},\cdots,t_{1n_1}),(t_{22},t_{23},\cdots,t_{2n_2}),\cdots,(t_{m2},t_{m3},\cdots,t_{mnm}))}$$
$$=1\mp(t_{01}+m)z^2\pm\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=2}^{n_j-1}(t_{ji}+1)(-z^2)^i+t_{jn_j}(-z^2)^{n_j}\right).$$

すなわち,

$$\nabla_{K_{\pm}^{P}(t_{01},(t_{12},t_{13},\cdots,t_{1n_1}),(t_{22},t_{23},\cdots,t_{2n_2}),\cdots,(t_{m2},t_{m3},\cdots,t_{mnm}))}$$
$$=\nabla_{K_{\pm}(t_{01},(t_{12},t_{13},\cdots,t_{1n_1}),(t_{22},t_{23},\cdots,t_{2n_2}),\cdots,(t_{m2},t_{m3},\cdots,t_{mnm}))}.$$

References

[1] J. H. Conway. An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. In *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*, pp. 329–358. Pergamon, Oxford, 1970.

[2] Yoko Hashizume. On the uniqueness of the decomposition of a link. *Osaka Math. J.*, Vol. 10, pp. 283–300, 1958.

[3] Louis H. Kauffman. *Formal knot theory*, Vol. 30 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.

[4] Charles Livingston. *Knot theory*, Vol. 24 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

[5] Hitoshi Murakami. Delta-unknotting number and the Conway polynomial. *Kobe J. Math.*, Vol. 10, No. 1, pp. 17–22, 1993.

[6] Hitoshi Murakami and Yasutaka Nakanishi. On a certain move generating link-homology. *Math. Ann.*, Vol. 284, No. 1, pp. 75–89, 1989.

[7] Masae Okada. Delta-unknotting operation and the second coefficient of the Conway polynomial. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 42, No. 4, pp. 713–717, 1990.

[8] 永冨武治. コンウェイ多項式の係数について. 修士論文, 神戸大学, 2003.

[9] 河内明夫. 結び目理論. シュプリンガー・フェアラーク東京（株）, 1990.