

# A proof of the LMO conjecture

栗屋 隆仁 述  
田所 勇樹 記

## 目次

1	Introduction	3
2	Lie algebra の復習	3
3	Chord diagram	5
4	Kontsevich integral	9
5	LMO invariant	13

# 1 Introduction

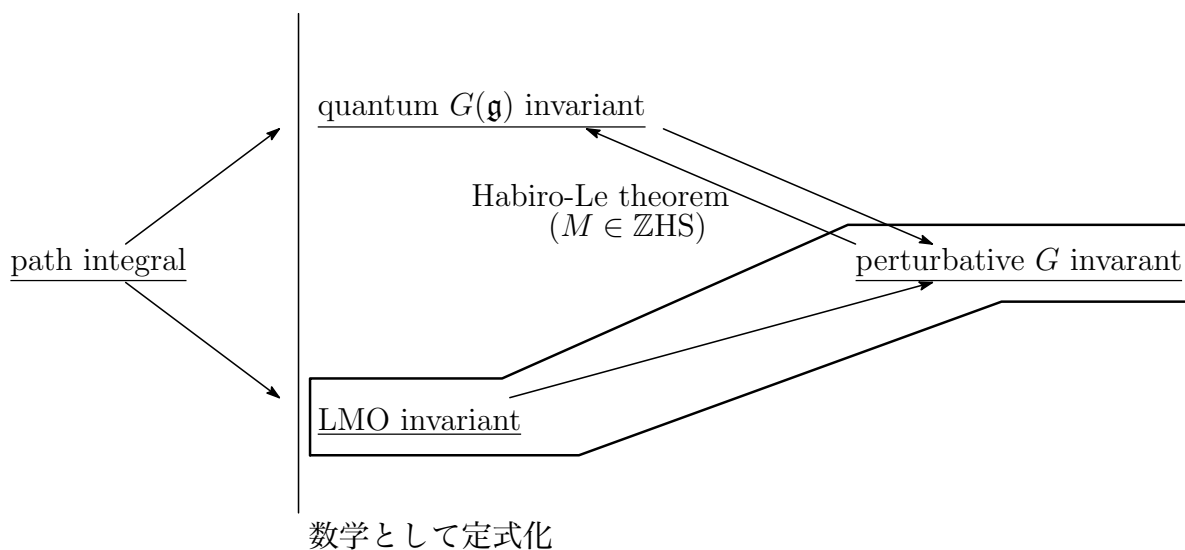
**Theorem 1.1** (LMO(Le, J. Murakami, Ohtsuki) conjecture, BGRT(1997) or Le's(?) theorem)  $G$  を単連結単純 Lie 群,  $\mathfrak{g}$  を  $G$  の Lie algebra とする. このとき,

$$\tau^{\text{PG}}(M_K) = |H_1(M_K; \mathbb{Z})|^{-\#\Phi} \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\hat{Z}^{\text{LMO}}(M_K))|_{e^h=q}$$

が成立.

今回は,  $\mathfrak{g}$ : semi-simple Lie algebra.

$$\tau^{\text{PG}}(M) = |H_1(M; \mathbb{Z})|^{-\#\Phi} \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\hat{Z}^{\text{LMO}}(M))|_{e^h=q}, \quad (M \in \text{QHS}).$$



$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  のとき, T. Ohtsuki により解決.

## 2 Lie algebra の復習

**Definition 2.1**  $\mathfrak{g}$ : finite dimensional Lie algebra /  $\mathbb{R}$  or  $\mathbb{C}$  とは,  $\mathfrak{g}$  が  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$  上のベクトル空間で, 以下の性質を満たす bilinear form  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  が存在すること.

$$\begin{cases} [y, x] & = -[x, y] \\ [[x, y], z] & = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \end{cases}$$

ベクトル空間  $V$  に対し,  $\text{End}(V)$  は,  $[f, g](v) = f \circ g(v) - g \circ f(v)$ , ( $v \in V, f, g \in \text{End}(V)$ ) と定めることにより, Lie algebra とみなせる. Lie algebra の表現とは,  $\mathfrak{g}$  から  $\text{End}(V)$  への Lie algebra としての準同型

$$\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$$

である. つまり,  $\rho$  は, 線形写像  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$  であり,  $[\cdot, \cdot]$  を

$$\rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) = [\rho(x), \rho(y)], \quad (x, y \in \mathfrak{g})$$

のように保つ.

**Example 2.2** (随伴表現)

固定された  $x \in \mathfrak{g}$  に対して,

$$\text{ad}(x): \mathfrak{g} \ni y \mapsto [x, y] \in \text{End}(\mathfrak{g})$$

は Lie algebra の表現.

以下,  $\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間とする.  $\mathfrak{g}$  が有限次元なので,  $\dim \mathfrak{g} = n$  と考えれば, 上記の随伴表現を  $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  とみなすことができる.

**Definition 2.3** (Cartan-Killing form)

symmetric bilinear form

$$B_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (x, y) \mapsto \text{Tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)) \in \mathbb{C}$$

が  $\mathfrak{g}$  の基底の取り方によらず定まる.  $B_{\mathfrak{g}}(x, y)$  を  $(x, y)$  と記す.

**Remark 2.4**  $\mathfrak{g}$ : semi-simple Lie algebra  $\Rightarrow B_{\mathfrak{g}}$ : non-degenerate.

semi-simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  に対して, Cartan subalgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  が同型を除いて一意に定まる.  $\alpha \in \mathfrak{h}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$  に対して,

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g}; [h, x] = \alpha(h)x \ (h \in \mathfrak{h})\}$$

と定める.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \right)$$

を root decomposition と呼び,  $\Phi$  を root と呼ぶ.  $\lambda \in \mathfrak{h}$  に対して,

$$\text{ad}(\lambda)(y) = [\lambda, y] = \begin{cases} 0 & (y \in \mathfrak{h}) \\ (\lambda, \alpha)y & (y \in \mathfrak{g}_{\alpha}) \end{cases}$$

が成り立つ. positive root  $\Phi_+ = \{\alpha > 0\}$  に対して,  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$  とする.

**Remark 2.5**  $\alpha \in \Phi$ によらず,  $\dim \mathfrak{g}_\alpha$ が一定である.

**Example 2.6**

$$\mathfrak{sl}_2\mathbb{C} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, \text{Tr}(A) = a + d = 0 \right\} = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F$$

となる. ただし,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり,  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$ となる.

$\mathfrak{g}$ に関して,  $T^m(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{\otimes m}$ と定め, テンソル代数を

$$\bigoplus_{m=0}^{\infty} T^m(\mathfrak{g})$$

とする. ただし,  $T^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}$ とする.  $\mathfrak{g}$ の元からなる非可換多項式環だと思って良い.  $\mathfrak{g}$ のテンソル代数を,  $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ ,  $(X, Y \in \mathfrak{g})$ で生成されるイデアルで割った環

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} T^m(\mathfrak{g}) / X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$$

を univesal enveloping algebra と呼ぶ.

**Remark 2.7** (普遍性)

$A$ : associative algebra を,  $[x, y] = xy - yx$ ,  $(x, y \in A)$ と定義して, Lie algebra とみなす. 任意の Lie algebra としての準同型  $f: \mathfrak{g} \rightarrow A$ に対して, 以下の図式を可換とする準同型  $g: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ が同型を除いて一意に存在する. ただし,  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ は自然な埋め込み.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow & \nearrow g & \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & & \end{array}$$

### 3 Chord diagram

**Definition 3.1** Chord diagram を基底に持つ,  $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を AS, IHX, STU の3つの relation で割った空間を

$$\mathcal{A}(S^1) = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{CD\} / \text{AS, IHX, STU}$$

と定める.

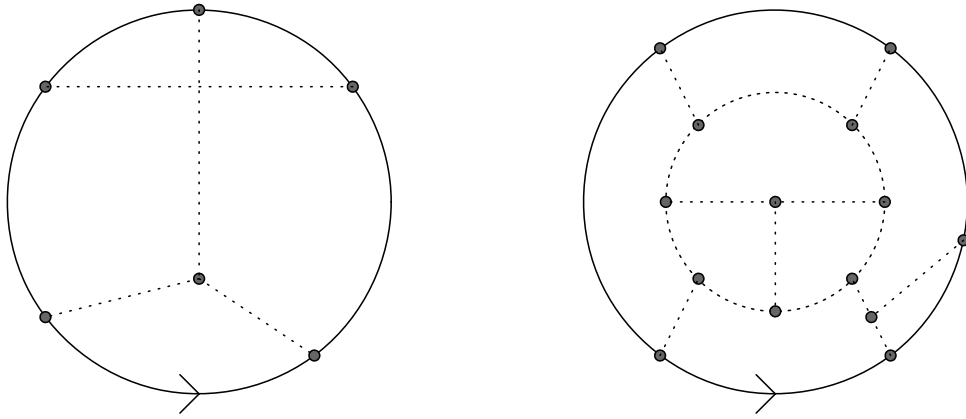
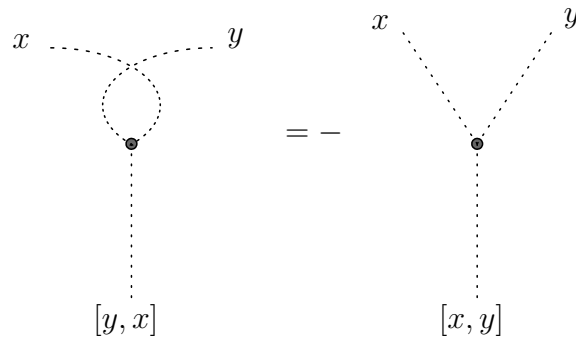


図 1: Chord diagram の例



$$[y, x] = -[x, y]$$

図 2: AS

台となる  $S^1$  は点線で表し, vertex  $\bullet$  は省略することもある.

**Remark 3.2**  $\deg(D) = \frac{\#\text{vertices}}{2}$  を fix すると,  $\mathcal{A}(S^1)$  は有限次元ベクトル空間と思える.

**Remark 3.3** STU relation は  $\rho = \text{ad}$  とすると, IHX になる.

**Definition 3.4**

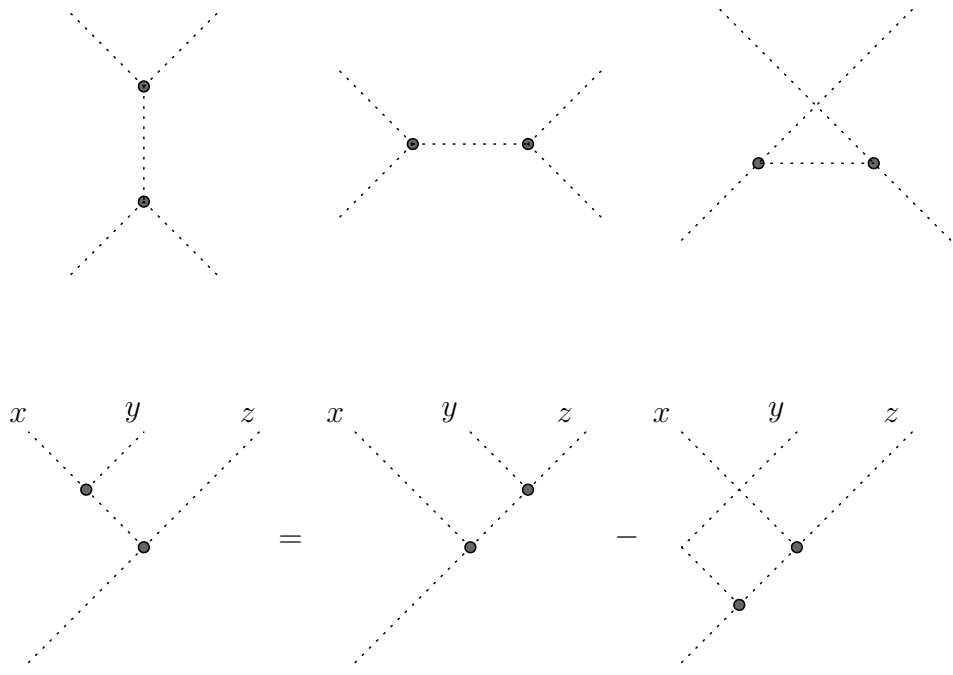
$$\mathcal{A}(\phi) = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{3\text{-valent graphs}\}/\text{AS, IHX.}$$

$$\mathcal{B} = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{1, 3\text{-valent graphs}\}/\text{AS, IHX.}$$

The symmetrization map

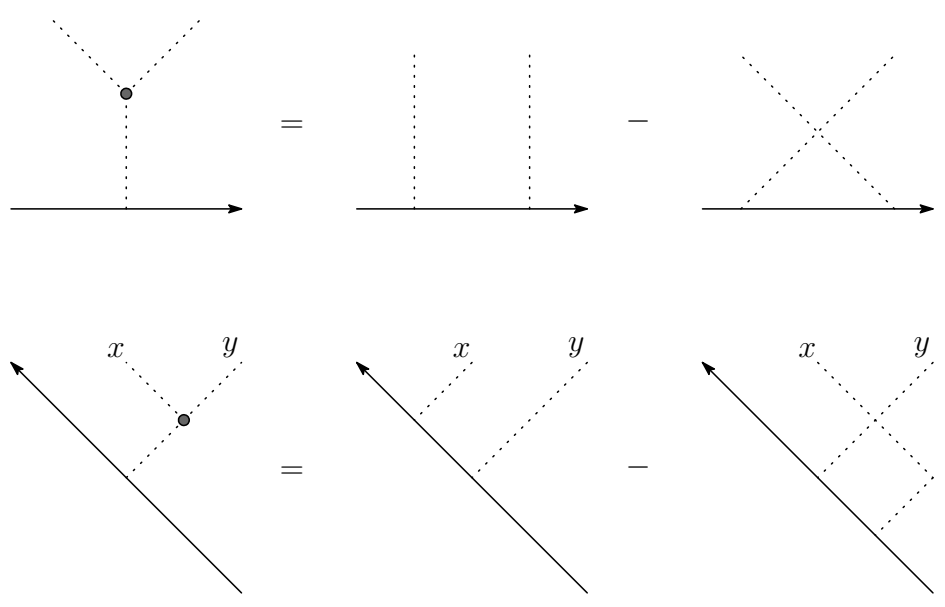
$$\chi: \mathcal{B} \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(S^1)$$

を図 6 のように定める.



$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

图 3: IHX



$$\rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$$

图 4: STU

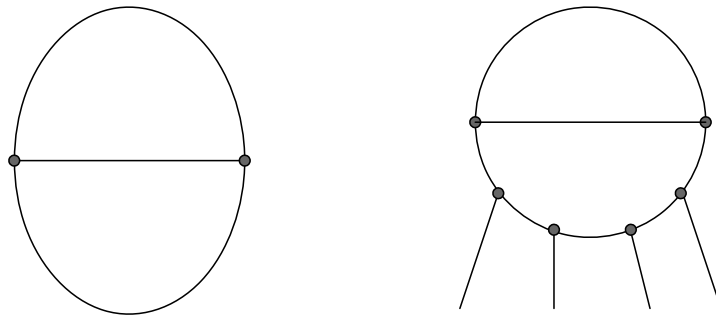


図 5: 3-valent graph, 1,3-valent graph の例

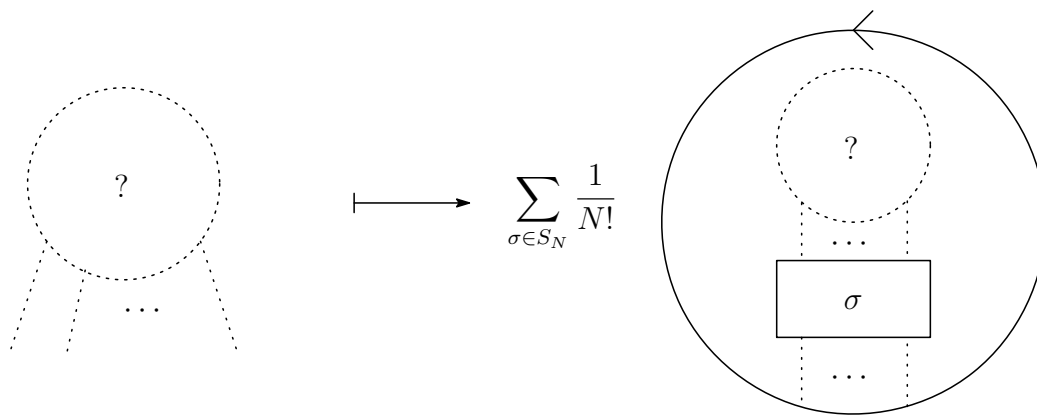


図 6:  $\chi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}(S^1)$  の定義



**Example 3.5** STU relation を用いて,

$$\begin{aligned} \chi\left(\text{diagram}\right) &= \frac{1}{2}\left(\text{diagram}_1 + \text{diagram}_2\right) \\ &= \frac{2}{2}\text{diagram}_3 = \text{diagram}_4. \end{aligned}$$

$D, D' \in \mathcal{B}$  に対して,

$$\hat{D} = \partial_D: \mathcal{B} \ni D' \mapsto \sum (D, D' \text{を合わせる}) \in \mathcal{B}$$

と定める. “合わせ方” は, legs of  $D = m$ , legs of  $D' = n$  とすると,  ${}_n P_m = \prod_{k=1}^m (n-k+1)$  通りある.

**Example 3.6**

$$\partial_{\text{diagram}} x^4 = 8 \text{diagram}_1 + 4 \text{diagram}_2.$$

$\frac{d^2}{dx^2} x^4 = 12x^2$  と対応.

**Definition 3.7**  $D, D' \in \mathcal{B}$  に対して, 次が定義できる.

$$\langle D, D' \rangle = \begin{cases} \partial_D D' & (\# \text{ legs of } D = \# \text{ legs of } D'), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

**Remark 3.8**  $\langle D, D' \rangle$  は  $\partial_D D'|_{x=0}$  みたいなもの.

## 4 Kontsevich integral

**Definition 4.1** Morse knot  $K \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_z$  の不変量として,

$$\bar{z}(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\substack{t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max} \\ t_j \text{ non-critical}}} \sum_{\substack{\text{pairings} \\ P = \{(z_j, z'_j)\}}} (-1)^{\downarrow P} D_P \prod_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$$

が定まる.

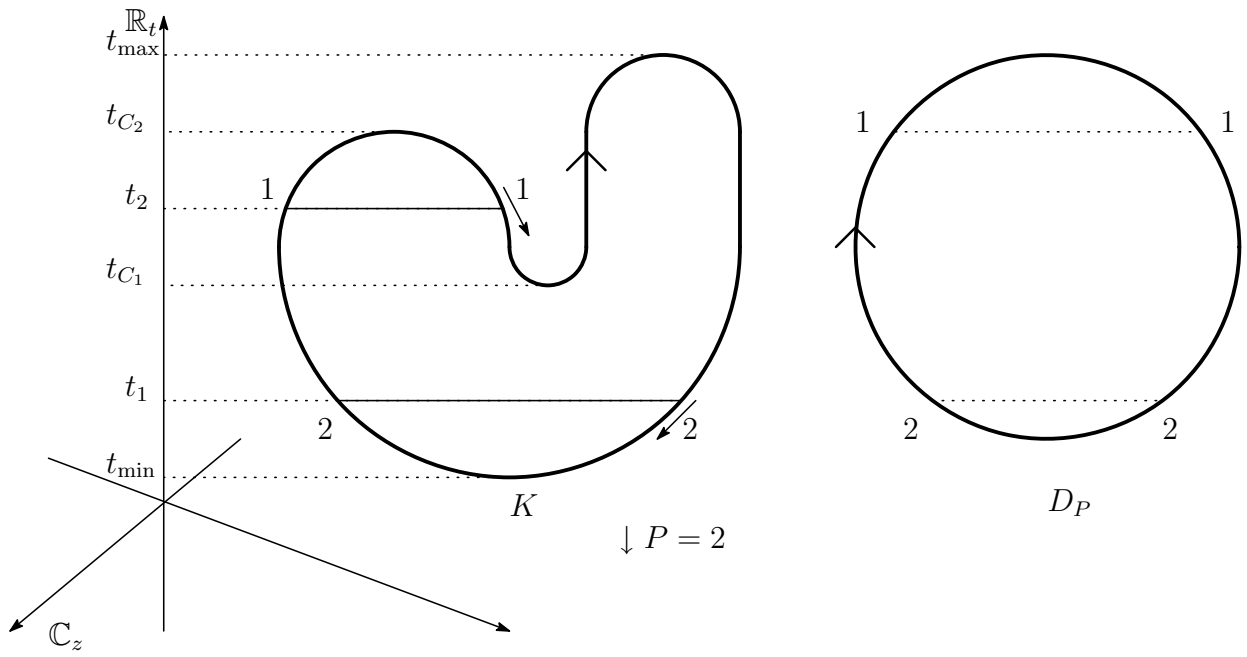


図 7:  $K$  と  $D_P$

$t_{C_j}$  は critical point.

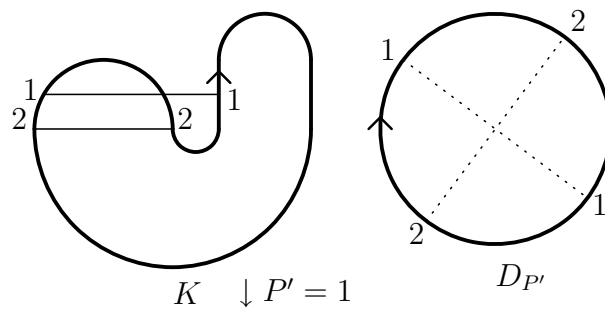


図 8:  $D_{P'}$

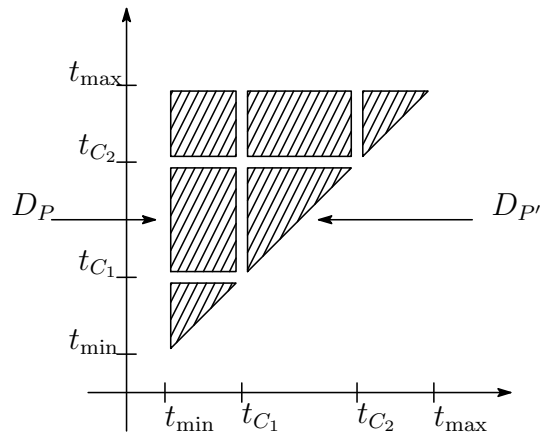
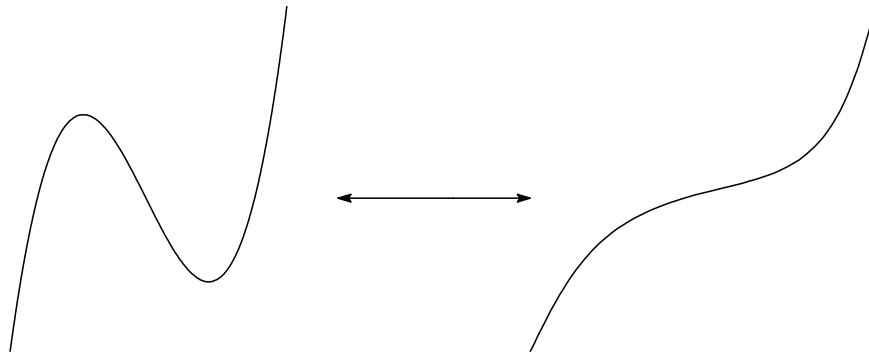


図 9: 積分範囲

**Remark 4.2**



では,  $\bar{z}(K)$  は不変にならない.

1-term relation

$$\bar{z}\left(\text{wavy curve}\right) = 0$$

を chord diagram に入れる.

$$\bar{z}\left(\mathcal{N}\right) = \bar{z}\left(\text{heart shape}\right) \bar{z}\left(\text{curve}\right)$$

が成り立つので,

$$\nu = \bar{z}\left(\text{heart shape}\right)^{-1}$$

とにおいて,

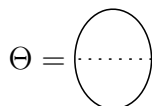
**Definition 4.3** (Kontsevich integral)

Morse knot  $K \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_z$  が critical point を  $c(K)$  個持つとき,

$$Z(K) = \bar{z}(K) \nu^{\frac{c(K)}{2}} \in \mathcal{A}(S^1)/1\text{-term}$$

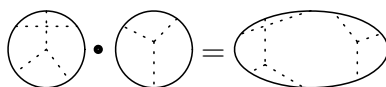
が定まる.

Chord diagram



とおく.

exp について



として  $\mathcal{A}(S^1)$  に積を入れる.

**Definition 4.4** (The integer framed version of Kontsevich integral)

$K$  を integer framed knot, with framing  $f$  とするとき,

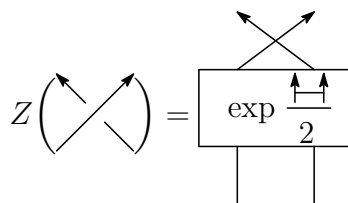
$$\hat{Z}(K) = Z(K) \exp\left(\frac{f}{2}\Theta\right).$$

が定まる.

**Remark 4.5**

$$\exp\left(\frac{f}{2}\Theta\right) = \left(\text{circle}\right) + \frac{f}{2} \left(\text{circle with chord}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{f}{2}\right) \left(\text{circle with chord}\right) + \dots$$

**Example 4.6**



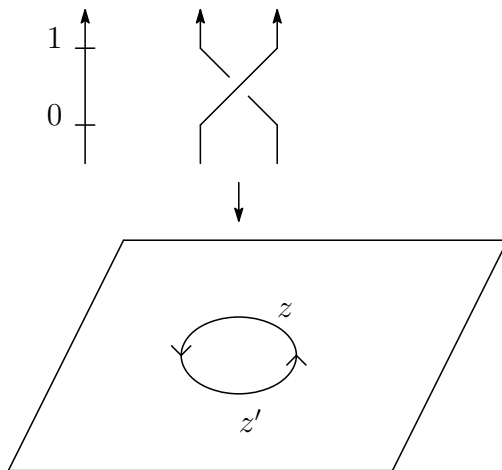
$\therefore$ )  $0 < t < 1$  となる  $t$  に対して,

$$z = \exp(\pi it), \quad z' = \exp(\pi it + \pi i)$$

とおくと,

$$dz = \pi i \exp(\pi i t) dt, \quad dz' = \pi i \exp(\pi i t + \pi i) dt$$

が成り立つ.



$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{0 < t_1 < \dots < t_m < 1} (\pi i)^m dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m \left\{ \begin{array}{c} \text{diagram of } m \text{ crossings} \\ \vdots \\ \text{diagram of } m \text{ crossings} \end{array} \right\} m \text{ 本} \\ &= \left( \frac{1}{2^m} \int_{0 < t_1 < \dots < t_m < 1} dt_1 \dots dt_m \right) \left( \begin{array}{c} \text{diagram of } m \text{ crossings} \\ \vdots \\ \text{diagram of } m \text{ crossings} \end{array} \right)^m \left( \begin{array}{c} \text{diagram of } m \text{ crossings} \\ \vdots \\ \text{diagram of } m \text{ crossings} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2^m} \frac{1}{m!} \left( \begin{array}{c} \text{diagram of } m \text{ crossings} \\ \vdots \\ \text{diagram of } m \text{ crossings} \end{array} \right)^m \left( \begin{array}{c} \text{diagram of } m \text{ crossings} \\ \vdots \\ \text{diagram of } m \text{ crossings} \end{array} \right) \end{aligned}$$

となるので, 結論が言える. ■

$$\check{Z}(K) = \nu \hat{Z}(K) \in \mathcal{A}(S^1)$$

は Knot invariant になる.  $\nu$  は Kirby move で不変になる.

## 5 LMO invariant

$G$  を単連結単純 Lie 群とし,  $\mathfrak{g}$  をその Lie algebra とする.  $V_\lambda$  を, dominant integral weight  $\lambda$  によって parametrize された,  $\mathfrak{g}$  の finite dimensional irreducible representation とする.  $\mathcal{B}$  に積を,

$$D_1 \cdot D_2 = D_1 \sqcup D_2$$

と導入して, 環構造を入れる. また, the formal PBW linear isomorphism を

$$\sigma = \chi^{-1}: \mathcal{A}(S^1) \rightarrow \mathcal{B}$$

とする. 任意の integer framed knot  $K$ , with framing  $f$  に対して, ある trivalent graph  $Y \in \mathcal{B}$  ( $\#$  3-valent  $\geq 1$ ) が存在して,

$$\sigma \check{Z}(K) = \exp\left(\frac{f}{2} \frown\right) \sqcup Y$$

となる.

**Definition 5.1** (The formal Gaussian integral of the Kontsevich integral)

$$\int^{\text{FG}} \sigma \check{Z}(K) = \left\langle \exp_{\sqcup}\left(-\frac{1}{2f} \frown\right), Y \right\rangle.$$

**Definition 5.2** (LMO invariant)  $K$  を framing  $f$  の framed knot とする.  $M_K$  を  $K$  に沿って surgery して得られる rational homology 3-sphere とするとき,

$$\hat{Z}^{\text{LMO}}(M_K) = \frac{\int^{\text{FG}} \sigma \check{Z}(K)}{\int^{\text{FG}} \sigma \check{Z}(\bigcirc^{\text{sign}(f)})}.$$

と定める.

**Remark 5.3** 逆元は,

$$(1 + a)^{-1} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots$$

で定義する.

**Theorem 5.4** (T. T. Q. Le)  $K$  を framing  $f$  の framed knot とし,  $M_K$  を  $K$  に沿って surgery して得られる rational homology 3-sphere とする. framing 0 の  $K$  と同じ knot を  $K_0$  とおく. このとき,  $\tau^{\text{PG}}(M_K)$  は次式で得られる.

$$\frac{1}{|W|} q^{\frac{\text{sign}(f)-f}{2} |\rho|^2} \prod_{\alpha > 0} (1 - q^{\text{sign}(f)(\rho, \alpha)}) \sum_{\substack{\beta \in Y, n \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 2|\Phi_+| \leq 2j \leq n + 2|\Phi_+|}} c_{\beta, 2j, n} (2j - 1)!! \left(-\frac{|\beta|^2}{f}\right)^j h^{n-j}.$$

ただし,  $(Q_{\mathfrak{g}}(K_0)|_{q=e^h})(\lambda - \rho) = \sum_{\substack{\beta \in Y, n \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 2|\Phi_+| \leq 2j \leq n + 2|\Phi_+|}} c_{\beta, j, n} \beta^j(\lambda) h^n$ ,  $\beta^j(\lambda) = (\beta, \lambda)^j$  であり,  $|W|$  は Weyl 群  $W$  の位数,  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$  である.

**Lemma 5.5**

$$\hat{Z}^{\text{LMO}}(M_K) = \langle \Omega, \Omega \rangle \exp\left(\frac{3\text{sign}(f) - f\theta}{48}\right) \times \int^{\text{FG}} \left(\hat{\Omega}^{-1} \sigma \check{Z}(K_0)\right) \exp_{\sqcup} \left(\frac{f}{2} \frown\right).$$

Semi simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  に対して, symmetric algebra  $S(\mathfrak{g})$  を

$$S(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} T^m(\mathfrak{g}) / X \otimes Y - Y \otimes X$$

と定め,  $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$  を  $\mathfrak{g}$  作用で不変な,  $S(\mathfrak{g})$  全体とする. The universal weight system は

$$\hat{W}_{\mathfrak{g}}: \mathcal{B} \rightarrow S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[\hbar]]$$

と言う写像である. このとき,

$$\hat{W}_{\mathfrak{g}} \circ \sigma \circ \check{z}(K): \mathcal{A}(S^1) \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[\hbar]]$$

となり,  $\lambda \in \mathfrak{h}$  に対して,  $J_{\mathfrak{g}, V_{\lambda}}(K)$  は knot の量子不変量で,

$$J_{\mathfrak{g}, V_{\lambda}}(K) = \hat{W}_{\mathfrak{g}} \circ \sigma \circ \check{z}(K)(\lambda) \times \dim V_{\lambda}$$

が成立する. また,

$$Q_{\mathfrak{g}}(K)(\lambda) = J_{\mathfrak{g}, V_{\lambda}}(K) \times J_{\mathfrak{g}, V_{\lambda}}(\bigcirc)$$

と定める.

$r$ : odd prime としたとき,

$$\tau_r^{\text{PG}}(M) \xrightarrow{\lim} \tau^{\text{PG}}(M)$$

となる.

$\mathcal{B}$  の元  $\omega_{2m}$

$$\omega_{2m} = \begin{array}{c} \bigcirc \\ \vdots \\ \underbrace{\quad}_{2m} \end{array}$$

と定める. また, the modified Bernoulli numbers  $b_{2m}$  を以下のべき級数展開で定義する.

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} x^{2m} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{\sinh(x/2)}{x/2} \right).$$

このとき,

$$\Omega = \exp_{\square} \sum b_{2m} \omega_{2m} \in \mathcal{B}$$

が定まる.

**Theorem 5.6** (S. Garoufalidis)  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$  としたとき,

$$\hat{W}_{\mathfrak{g}}(\langle \Omega, \Omega \rangle) = \prod_{\alpha > 0} \frac{\sinh \frac{(\rho, \alpha) h}{2}}{\frac{(\rho, \alpha) h}{2}}$$

が成立.

$$\theta = \bigcirc$$

とおく.




**Lemma 5.7**

$$\hat{W}_{\mathfrak{g}}(\theta) = 24(\rho, \rho)$$

が成立. ただし,  $(, )$  は Cartan killing form である.

$\hat{W}_{\mathfrak{g}}(\theta)$  を 2 種類の方法で計算する.

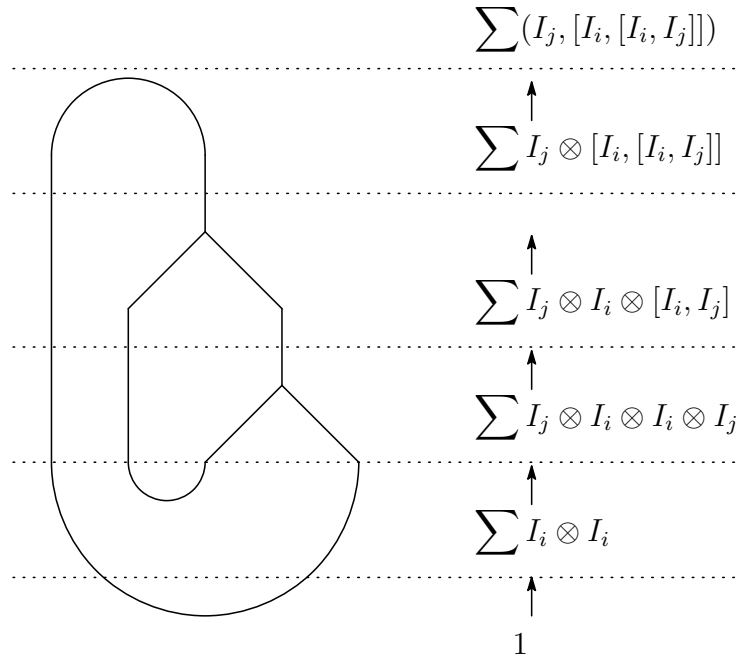
その 1(Lie algebra との対応がみやすい)

	$\mathbb{C}$ $\uparrow$ $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$	$(X, Y)$ $\uparrow$ $X \otimes Y$
	$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ $\uparrow$ $\mathbb{C}$	$\sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} I_i \otimes I_i$ $\uparrow$ 1
	$\mathfrak{g}$ $\uparrow$ $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$	$[X, Y]$ $\uparrow$ $X \otimes Y$

ただし,  $\{I_{\alpha}\}$ : orthonormal basis with respect to  $(, )$ .

$\theta$  を以下の図のようにみなす.

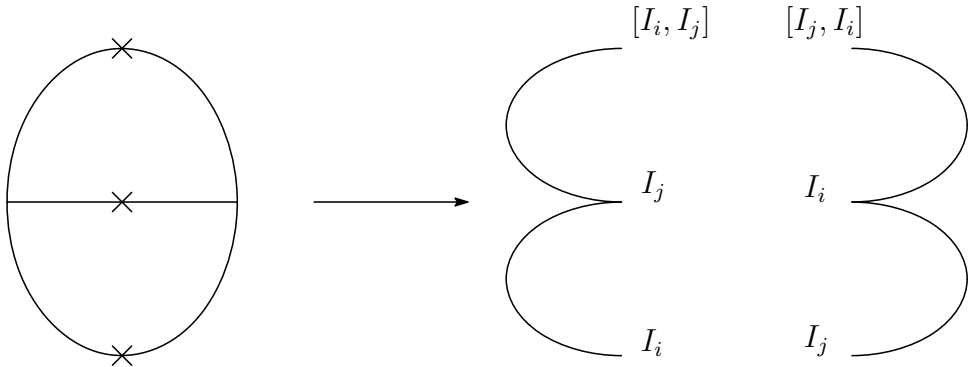




よって,

$$\begin{aligned}
 \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\theta) &= \sum (I_j, [I_i, [I_i, I_j]]) \\
 &= \sum (I_j, \text{ad}(I_i)\text{ad}(I_i)I_j) \\
 &= \sum_i \text{ad}(I_i)\text{ad}(I_i) \times \dim \mathfrak{g} \\
 &= C_{\text{ad}} \dim \mathfrak{g} \quad (C_{\text{ad}} \text{はカシミール元}) \\
 &= 24(\rho, \rho).
 \end{aligned}$$

その2(Lemma 5.7の証明)



$$\begin{aligned}
 &\longrightarrow \sum_{i,j} ([I_i, I_j], [I_j, I_i]) \times (I_j, I_j) \times (I_i, I_i) \\
 &([x, y], z) = (x, [y, z])
 \end{aligned}$$

が成り立つので,  $(I_i, I_j) = \delta_{ij} = \partial_{x_i} x_j$  を用いると,  $24(\rho, \rho)$  と  $\sum_{i,j} ([I_i, I_j], [I_j, I_i]) \times (I_j, I_j) \times (I_i, I_i)$  が一致する. ■

Theorem 1.1 の証明

$|H_1(M_K; \mathbb{Z})|^{-\#\Phi_+} \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\hat{Z}^{\text{LMO}}(M_K))|_{e^h=q}$  を計算して, Theorem 5.4 の右辺に一致すれば良い. Lemma 5.5 より,

$$\begin{aligned} & \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\hat{Z}^{\text{LMO}}(M_K)) \\ &= \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\langle \Omega, \Omega \rangle) \exp\left(\frac{3\text{sign}(f) - f}{48} \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\theta)\right) \times \hat{W}_{\mathfrak{g}}\left(\int^{\text{FG}} (\hat{\Omega}^{-1} \sigma \check{z}(K_0)) \exp_{\square}\left(\frac{f}{2} \curvearrowright\right)\right) \end{aligned}$$

となる. \_\_\_\_\_ 部分は, Theorem 5.6 と Lemma 5.7 により,  $e^h = q$ ,  $|\rho|^2 = (\rho, \rho)$  とおけば,

$$\begin{aligned} \text{_____} &= \prod_{\alpha>0} \frac{\sinh \frac{(\rho, \alpha)}{2} h}{\frac{(\rho, \alpha)}{2} h} \exp\left(h \frac{3\text{sign}(f) - f}{48} 24(\rho, \rho)\right) \\ &= \prod_{\alpha>0} \frac{\sinh \frac{(\rho, \alpha)}{2} h}{\frac{(\rho, \alpha)}{2} h} (e^h)^{\frac{3\text{sign}(f) - f}{2} |\rho|^2} \\ &= \boxed{q^{\frac{\text{sign}(f) - f}{2} |\rho|^2} \prod_{\alpha>0} (1 - q^{\text{sign}(f)(\rho, \alpha)})} \times \frac{1}{\prod_{\alpha>0} (\rho, \alpha)} \left(-\frac{\text{sign}(f)}{h}\right)^{\#\Phi_+} \dots \diamond \end{aligned}$$

である.

一方, \_\_\_\_\_ 以外の部分は, 次のように計算される.

**Theorem 5.8** (S. Garoufalidis) 以下の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\hat{\Omega}} & \mathcal{B} \\ \hat{W}_{\mathfrak{g}} \downarrow & \circ & \downarrow \hat{W}_{\mathfrak{g}} \\ S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[h]] & \xrightarrow{D(j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}})} & S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[h]]. \end{array}$$

ただし,  $D(j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}})$  は Duflo 同型である.

$p \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[h]]$ ,  $\lambda \in \mathfrak{h}$  に対して,  $p(\lambda)$  と evaluate でき,

$$D(j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}})p(\lambda) = p(\lambda + \rho)$$

が成立.

この Theorem を用いると,

$$\begin{aligned}
& \hat{W}_{\mathfrak{g}} \left( \int^{\text{FG}} \left( \hat{\Omega}^{-1} \sigma \check{z}(K_0) \right) \exp_{\square} \left( \frac{f}{2} \curvearrowright \right) \right) \\
&= \hat{W}_{\mathfrak{g}} \left( \left\langle \exp_{\square} \left( -\frac{1}{2f} \curvearrowright \right), \hat{\Omega}^{-1} \sigma \check{z}(K_0) \right\rangle \right) \\
&= \exp \left( -\frac{h}{2f} \left( \sum_i \partial_{x_i}^2 \right) \right) \left( Q_{\mathfrak{g}}(K_0)(\lambda - \rho) \right) \\
&= \exp \left( -\frac{h}{2f} \sum_i \partial_{x_i}^2 \right) \left( \frac{\prod_{\alpha > 0}(\rho, \alpha)}{\prod_{\alpha > 0}(h^{-1}\alpha)^2} \sum c_{\beta, i, n} h^n (h^{-1}\beta)^i \right) \Big|_{x_i=0} \\
&= (-fh)^{\#\Phi_+} \frac{\prod_{\alpha > 0}(\rho, \alpha)}{|W|} \left[ \sum c_{\beta, 2j, n} \left( -\frac{|\beta|^2}{f} \right)^j (2j-1)!! h^{n-j} \right] \dots \heartsuit
\end{aligned}$$

となる.

$$\dim V_{\lambda-\rho} = \prod_{\alpha > 0} \frac{(\lambda, \alpha)}{(\rho, \alpha)}, \quad ((\lambda, \alpha) = \alpha(\lambda))$$

と

$$\hat{W}_{\mathfrak{g}}(D) = W_{\mathfrak{g}}(D) \times h^{\deg(D)}$$

に注意.

あとは,  $\diamond, \heartsuit$  と

$$H_1(M_K; \mathbb{Z}) = f \text{sign}(f)$$

を合わせれば良い.  $\blacksquare$

**Definition 5.9** (The Dedekind symbol)

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  に対して,  $\mathbb{Q}$  に値を持つ  $S\left(\frac{p}{q}\right)$  が以下で特徴づけられる.

$$\begin{aligned}
S(-x) &= -S(x) \\
S(x+1) &= S(x) \\
S\left(\frac{p}{q}\right) + S\left(\frac{q}{p}\right) &= \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{pq} - 3\text{sign}(pq).
\end{aligned}$$

このとき, Lens space  $L_{a,b}$  の perturbative invariant が計算できる.

**Corollary 5.10**

$$\tau^{\text{PG}}(L_{a,b}) = q^{-\frac{s(\frac{b}{a})}{2}|\rho|^2} \prod_{\alpha>0} \frac{q^{\frac{(\rho,\alpha)}{2a}} - q^{-\frac{(\rho,\alpha)}{2a}}}{q^{\frac{\text{sign}(a)(\rho,\alpha)}{2}} - q^{-\frac{-\text{sign}(a)(\rho,\alpha)}{2}}}.$$