Reidemeister torsionの利用法
(How to use the Reidemeister torsion)

大阪市立大学 数学研究所 上級研究所員
門上　晃久

2004年1月30日（金）発表

Abstract

1935年、K. Reidemeister [20] は閉3次元多様体に対してtorsion invariantを定義して、3次元lens spaceを完全に分類した．この invariant を我々は *Reidemeister torsion* と呼ぶ．W. Franz [6] は一般次元のlens spaceを分類した．やはりtorsion invariantを用いたのだが、その際代数的数論的な定理が決め手になっている．我々の第1の結果は、このFranzの定理を応用している．この強力な定理は、意外と利用されていないと思われる．Franzの定理の証明には L 関数の理論が用いられていて、近年結び目理論と数論の関係が深くなってきている流れの中で、その応用や一般化などは掘り下げる価値のある問題だろう．

1962年、J. W. Milnor [14] はReidemeister torsionとAlexander polynomialの密接な関係を指摘した．V. G. Turaev [24], [25], [26] は1976年からの一連の論文で、有限CW複体のReidemeister torsionを計算し、特にコンパクト3次元多様体に対して詳しい計算公式を与えた．

前半は、V. G. Turaevに従ってReidemeister torsionを定義し、基本的な計算公式を与える．本質は、homology theoryにおけるMayer-Vietorisの定理に対応する切除性質がReidemeister torsionに対しても成り立つことである．ただし、Dehn surgeryとは相性がいいが、Heegaard分解とは相性があまりよくないことは注意しておく．なぜなら、Reidemeister torsionが0でないための必要条件はEuler numberが0であることだからである．

後半は、homology lens spaceに的を絞って、Reidemeister torsionの値そのものを見ていき、lens spaceのReidemeister torsionの値と一致するかどうかを見ていく．一致するときを *lens space type* と定義する．“値そのものを見ていく”の意味だが、値の表示は割と簡単にできるのだが、2つ表示された値

を持ってきたとき、それらが同じか違うかの判定が意外と難しい. Homology lens space の Reidemeister torsion の値は円分体に値を取るので、当然円分体（に限らない代数体）に関する代数的数論の知識が必要になってくる. しかし筆者のレベルからしてまだ大したことはできていないが、今後（この勉強会を通して）他の人々の手によって高いレベルの応用がなされることを期待している.

今回の我々の結果は、地道な幾何的な手法によって得られた精密な結果を Reidemeister torsion で見直していくものである. これには大きく 3 つの意図がある. 1 つ目は、Reidemeister torsion の invariant としての切れ味を見るものである. どれぐらい精密なのか？それ程でもないのか？2 つ目は、トポロジーにおける幾何的手法と代数的手法の関係として、代数的手法は偵察部隊の役割を持つべきだが（特に、精密さをある程度犠牲にした invariant は）、近頃はやや幾何的手法が先行している向きがあるので、或いは、精密な invariant は偵察部隊というより主力部隊の役割を担おうとする向きがあるので、Reidemeister torsion に偵察部隊としての役割を担ってもらいたい意図がある. 3 つ目は、より精密な invariant の技術開発をも刺激するであろうことである.

我々の第 1 の結果は、L. Moser [16] (1971) による torus knot に沿った rational surgery の結果の多様体の完全な分類を Reidemeister torsion で翻訳する. Lens space に対しては精密さを保っていた Reidemeister torsion は、この homology lens space に対しては必ずしも精密ではないことがわかる. しかし偵察部隊としては（筆者の偏見込みで）合格点を与えられる.

第 2 の結果は、合田-寺垣内 [7] (2000) による結果の一部である、genus 1 knot K に沿った surgery の結果が lens space になるならば、K は trefoil である、という結果の翻訳をする. 我々は、次数 2 の Alexander polynomial を持つ knot K に沿う surgery の結果が lens space type のとき、K の Alexander polynomial が $t^2 - t + 1$ であることを示した.

第 1 の結果の証明は Franz の定理を使い、第 2 の結果の証明は代数的数のノルムを利用した. これらの手法はそれぞれ拡張の可能性を持っている. 最後にその拡張と応用を行った. （今回は書かない. p3 参照.）まだまだやるべきことは残っている. また、Ozsváth-Szabó の結果 [17], [11] (2003) との関係も興味のある所である.

3 次元 lens space の分類定理の別証明は [1], [19]、simple homotopy や Whitehead torsion については [3], [15], [30]、twisted Alexander polynomial については [29] を参照されたい.

Contents

（お詫び）実際の講演は、1 章は割と丁寧に、3 章はアウトラインのみの説明でした．予定は上記にあるものでしたが、4 章は現在進行中あるいは進行予定の面があるために、割愛させていただきます．現在進行中の一部は [10] にありますので、そちらを参照してください．

0. Statement of Main Theorems

細かい用語は後述する．動機となった定理と我々の２つの結果を述べる．

Theorem (Moser [16]; Gordon [8]; Shimozawa [23]) *Let $K_{r,s}$ be the (r,s)-torus knot in S^3, and $M = S^3(K_{r,s}; p/q)$ the result of p/q-surgery along $K_{r,s}$ where $|p|, |r|, |s| \geq 2$ and $q \neq 0$. Then there are three cases* :

(1) *If $|p - qrs| \neq 0$, then M is a Seifert fibered space with three singular fibers of multiplicities $|r|, |s|$ and $|p - qrs|$. In particular,*

(2) *if $|p - qrs| = 1$, then M is the lens space $L(p, qr^2)$* (Figure 1).

(3) *If $|p - qrs| = 0$ $(p/q = rs)$, then M is the connected sum of two lens spaces, $L(r,s)\sharp L(s,r)$.*

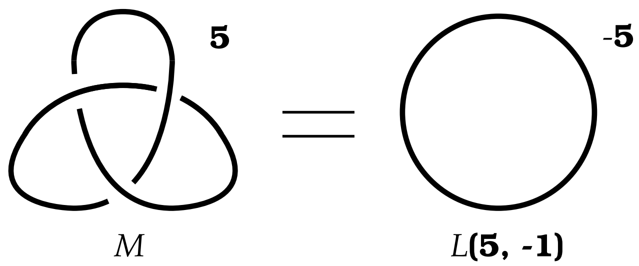

Figure 1: the result of surgery is a lens space

Notation

$$\varDelta_{r,s}(t) := \frac{(t^{rs}-1)(t-1)}{(t^r-1)(t^s-1)} \qquad ((r,s)=1),$$

ここで (r,s) は r と s の最大公約数を表す．$(r,s) = 1$ は r と s が互いに素ということである．

Main Theorem 1 *Let $K_{r,s}$ $((r,s) = 1)$ be a knot in a homology 3-sphere Σ with its Alexander polynomial $\varDelta_{r,s}(t)$, and $M = \Sigma(K_{r,s}; p/q)$ the result of p/q-surgery along $K_{r,s}$ where $|p|, |r|, |s| \geq 2$ and $q \neq 0$. Then M is of lens space type if and only if the following* (1) *and* (2) *hold.*

(1) $(p,r) = 1$, *and* $(p,s) = 1$, *and*

(2) $r \equiv \pm 1 \pmod p$ *or* $s \equiv \pm 1 \pmod p$ *or* $qrs \equiv \pm 1 \pmod p$.

Theorem (Goda-Teragaito [7]) *Let K be a genus 1 knot in S^3. If a rational surgery along K yields a lens space, then K is the trefoil.*

Notation $\varDelta_n(t) := n(t-1)^2 + t = nt^2 - (2n-1)t + n \quad (n \neq 0)$.

Main Theorem 2 *Let K be a knot in a homology 3-sphere Σ with its Alexander polynomial $\varDelta_K(t) = \varDelta_n(t)$, and $M = \Sigma(K; p/q)$ the result of p/q-surgery along K where $|p| \geq 2$ and $q \neq 0$. Let d (≥ 2) be a divisor of p, ξ_d a primitive d-th root of unity, $\psi_d : \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t^p - 1) \to \mathbf{Q}(\xi_d)$ a homomorphism such that $\psi_d(t) = \xi_d$, and $\tau^{\psi_d}(M)$ the Reidemeister torsion associated to ψ_d. Then the following* (1) *and* (2) *hold.*

(1) *If $n \leq -1$, then $\tau^{\psi_p}(M)$ is not of lens space type.*

(2) *If $|n| \geq 2$ and d is a prime number, then $\tau^{\psi_d}(M)$ is not of lens space type.*

これにより以下が導かれる.

Corollary *In the same assumption as Main Theorem 2, if M is of lens space type, then*

$$\varDelta_K(t) = t^2 - t + 1 \quad (n = 1).$$

これは合田-寺垣内 [7] の結果の代数的翻訳になっていて、以下の Ozsváth-Szabó [17] の結果の一部の拡張もしている.

Theorem (Ozsváth-Szabó [17]) *Let K be a knot in S^3, and $M = S^3(K; p)$ the result of p-surgery along K where p is an integer. If M is a lens space, then the Alexander polynomial of K is the following form*

$$\varDelta_K(t) = (-1)^m + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j}(t^{s_j} + t^{-s_j}),$$

where $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m$.

$\boxed{\textbf{Terminology}}$ （基本となる用語集）

• $\boxed{\text{Reidemeister torsion}}$ $(\tau(\mathbf{C}_*), \tau^{\varphi}(\mathbf{C}_*), \tau(X), \tau^{\varphi}(X))$: ある環 R 上 finitely generated free chain complex $\mathbf{C}_*$ から決まる invariant のことをいう. 記号で $\tau(\mathbf{C}_*)$ と表す. 値は R の商体の元である. 実際に値が計算できるように様々な制限を付ける. 環 R は integral domain である方が扱い易い. 環 R から計算しにくいときは、環準同型 $\varphi : R \to R'$ に付随した invariant $\tau^{\varphi}(\mathbf{C}_*)$ を計算するのがよい. 本講演の肝となるテクニックである. ここで、R' は invariant が計算し易い環である. この値も Reidemeister torsion という.

空間の Reidemeister torsion は、finite CW-complex X に対して定義される. X の cell decomposition からの自然な chain complex が存在する. それから Reidemeister torsion を計算するのもいいが、そうではなくて、X の適当な covering space $\tilde{X}$ の cell decomposition からの自然な chain complex の Reidemeister torsion を計算する. 本講演では $\tilde{X}$ としては、maximal abelian covering を取ってくる. $H = H_1(X;\mathbf{Z})$ が covering transformation group になり、$\tilde{X}$ からの chain complex $\mathbf{C}_*(\tilde{X})$ にも H の元が作用し、$\mathbf{Z}[H]$-chain complex と見なせる. この Reidemeister torsion を X の Reidemeister torsion として、$\tau(X)$ と表す. 実際は環準同型 $\varphi : \mathbf{Z}[H] \to R$ に付随した $\tau^{\varphi}(X)$ にしないと意味のある値が出てきにくい. そして、この invariant には自由度がある. $\pm\varphi(H)$ の元の倍数は同じ値と見なす. Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ には $\pm t^n$ 倍の自由度があるのと同じ理由である. 本講演では、さらに “隠れた自由度” があることを指摘し、追求していく.

• $\boxed{\text{Homology lens space}}$ $(M = \Sigma(K; p/q))$: 向き付け可能閉3次元多様体 M が *homology lens space* であるとは、$H_1(M;\mathbf{Z})$ が有限巡回群 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ のときをいう. 本講演では $p \geq 2,\ p \neq \infty$ を仮定する.

任意の homology lens space M は、適当な homology 3-sphere Σ 内の適当な knot K に沿った適当な p/q-surgery の結果として表すことができる. ここで、$|p| \geq 2, q \neq 0$. 記号で $M = \Sigma(K; p/q)$ と表す.

• $\boxed{\text{Lens space type}}$: Lens space $L(p,q)$ の 1 次元ホモロジー群の生成元を t とする. つまり、$H = H_1(L(p,q);\mathbf{Z}) = \langle t \rangle = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. ξ_d を 1 の原始 d 乗根とする. ここで、$d\ (\geq 2)$ は p の約数. 準同型 $\psi_d : \mathbf{Z}[H] \to \mathbf{Q}(\xi_d)$ を $\psi_d(t) = \xi_d$ から決まるものとする. このとき、$\tau^{\psi_d}(L(p,q)) = (\xi_d - 1)^{-1}(\xi_d^{\bar{q}} - 1)^{-1}$ である. ここで、$q\bar{q} \equiv 1 \pmod{p}$.

ζ を 1 の原始 n 乗根とするとき、第 n 次円分体 $\mathbf{Q}(\zeta)$ の元 a が *lens space type* であるとは、$a = \pm\zeta^m(\zeta^i - 1)^{-1}(\zeta^j - 1)^{-1}$ $((i,n) = 1,\ (j,n) = 1)$ と表されるときをいう. a はある lens space の Reidemeister torsion の値になる.

Homology lens space $M = \Sigma(K; p/q)$ の 1 次元ホモロジー群の生成元を

t とする．つまり、$H = H_1(M;\mathbf{Z}) = \langle t \rangle = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. ξ_d を 1 の原始 d 乗根とする．ここで、$d\ (\geq 2)$ は p の約数. 準同型 $\psi_d : \mathbf{Z}[H] \to \mathbf{Q}(\xi_d)$ を $\psi_d(t) = \xi_d$ から決まるものとする．このとき、いかなる d に対しても $\tau^{\psi_d}(M)$ が lens space type であるとき、M そのものを *lens space type* という．もはや Reidemeister torsion では lens space との差を判定することができない多様体ということである.

• $\boxed{\text{代数的数のノルム}}$ ($N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha)$) : $K/\mathbf{Q}$ を $\mathbf{Q}$ 上の有限次 Galois 拡大とする. K の元 α の $\mathbf{Q}$ 上のノルム $N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha)$ を以下のように定義する.

$$N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}\,(K/\mathbf{Q})} \sigma(\alpha).$$

ここで、$\mathrm{Gal}\,(K/\mathbf{Q})$ は Galois 拡大 $K/\mathbf{Q}$ の Galois 群とする. α の最小多項式を monic にしたときの定数項のベキ乗の ± 1 倍になっている.

1. Definition of Reidemeister torsion

Reidemeister torsionの定義は、代数的な準備をしてからfinite CW-complex X に対してなされる. 以下、Turaev [25] に従って定義する.

1.1 Reidemeister torsion of chain complex

以下に出てくる環は全て1を持つ可換環で零環でないもの（$1 \neq 0$）とする.

Definition 1.1. 環 R 上のchain complex $\mathbf{C}_*$ が *finitely generated* とは、C_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ がfinitely generated R-moduleで、

$$\mathbf{C}_*: \ 0 \to C_m \xrightarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0 \to 0$$

であるときをいう. $\mathbf{C}_*$ が *free* とは、C_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ が全てfree R-moduleのときをいい、$\mathbf{C}_*$ が *acyclic* とは、$\mathbf{C}_*$ がexact sequenceのときをいう.

$$\mathbf{C}_* \text{ が acyclic} \Longleftrightarrow H_*(\mathbf{C}_*) = \bigoplus_{i=0}^{m} H_i(\mathbf{C}_*) = 0.$$

以下 $\mathbf{C}_*$ は、はじめと最後の0を省略して、

$$\mathbf{C}_*: \ C_m \xrightarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0$$

と表すこともある.

主に環 R が、以下の性質 $(*)$ を満たす場合を考えていく.

$(*)$ R 上のfinitely generated free module M のbasisの濃度は一定.

まず M のbasisの濃度が有限なのは容易にわかる.（背理法で示すことができる.）$(*)$ を満たす十分条件として、次のようなものがある.

Proposition 1.2. [3] 環 R からintegral domain K へのhomomorphism $f : R \to K$ で $f(1_R) = 1_K$ となるものがあるとき、R は $(*)$ を満たす.

Proof R 上のfinitely generated free moduleを M とする. M の2つのbasis $\{x_i\}_{i=1,\cdots,m}$, $\{y_j\}_{j=1,\cdots,n}$ を用意する. このとき、$m = n$ を示せばよい.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \ (i = 1, \cdots, m), \ y_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} x_i \ (j = 1, \cdots, n) \text{ とすると、}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{i=1,\cdots,m \ ; \ j=1,\cdots,n}, \ B = \begin{pmatrix} b_{ji} \end{pmatrix}_{j=1,\cdots,n \ ; \ i=1,\cdots,m}$$

は変換行列である．これは、$AB = I_m,\ BA = I_n$ (I_m, I_n は m 次、n 次の単位行列) を満たす．

$f(I_m) = I_m,\ f(I_n) = I_n$ より、$f(AB) = f(A)f(B) = I_m,\ f(BA) = f(B)f(A) = I_n$.

K の商体 $Q(K)$ でも同じ関係なので、$m = n$. ∎

Corollary 1.3. [3] group G で生成する group ring $\mathbf{Z}[G]$ は $(*)$ を満たす．

Proof G の元を 1 に移す準同型 $f : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}$ が Proposition 1.2 の条件を満たす．∎

以下に出てくる環は $\underline{\text{全て}\ (*)\ \text{を満たす}}$ とする．

Notation (1) 環 R 上の free module M の basis の濃度を、M の *dimension* または *rank* といい、$\dim_R M$ ($\dim M$) または $\mathrm{rank}_R M$ ($\mathrm{rank}\, M$) と表す．（Turaev は、$\mathrm{rk}_R M$ ($\mathrm{rk}\, M$) と表している．）

(2) M の 2 つの basis を $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_r), \mathbf{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_r)$ とする．ここで、$r = \mathrm{rank}\, M$.

$b_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot c_j \ (i = 1, \cdots, r)$ となる $a_{ij} \in R\ (i, j = 1, \cdots, r)$ が存在する．

$A = \left(\ a_{ij} \ \right)_{i,j=1,\cdots,r}$ とするとき、$\left[\mathbf{b}/\mathbf{c}\right] := \det(A)$ とする．

$r = 0$ のときは $\left[\emptyset/\emptyset\right] = 1$ とする．

このとき以下がわかる．$\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ を free module M の basis とする．

① $\left[\mathbf{b}/\mathbf{c}\right]$ は R の正則元である．

② $\left[\mathbf{b}/\mathbf{c}\right] \cdot \left[\mathbf{c}/\mathbf{d}\right] = \left[\mathbf{b}/\mathbf{d}\right]$.

③ $\left[\mathbf{b}/\mathbf{b}\right] = 1,\ \left[\mathbf{c}/\mathbf{b}\right] = \left[\mathbf{b}/\mathbf{c}\right]^{-1}$.

④ R の正則元 u と $\mathbf{c}$ が与えられたとき、$\left[\mathbf{b}/\mathbf{c}\right] = u$ となる $\mathbf{b}$ が存在する．

①, ②, ③ により、$\left[\mathbf{b}/\mathbf{c}\right] = 1$ のとき、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ は *equivalent* と定義すると、同値関係になる．

(3) $\mathbf{b}' = (b_1, b_2, \cdots, b_{r'}), \mathbf{b}'' = (b_{r'+1}, \cdots, b_r)$ のとき、$\mathbf{b} = \mathbf{b}'\mathbf{b}'' = (b_1, b_2, \cdots, b_r)$ と表す．

Definition 1.4. (Reidemeister torsion of a chain complex)

$$\mathbf{C}_*:\ C_m \xrightarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0$$

を体 F 上の finitely generated free chain complex とする.

C_i の basis $\mathbf{c}_i = (c_i^{(1)}, \cdots, c_i^{(p_i)})$ $(i = 0, \cdots, m)$ を固定し、$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_0, \cdots, \mathbf{c}_m)$ とすると、これは $\mathbf{C}_*$ の basis である.

$$Z_i := \mathrm{Ker}\,(\partial_{i-1}),\ B_i := \mathrm{Im}\,(\partial_i),\ H_i := H_i(\mathbf{C}_*) = Z_i/B_i$$

とおく $(i = 0, \cdots, m)$. このとき、

$$C_i \cong Z_i \oplus B_{i-1} \cong B_i \oplus H_i \oplus B_{i-1}.$$

B_i の basis $\mathbf{b}_i = (b_i^{(1)}, \cdots, b_i^{(q_i)})$、$H_i$ の basis $\mathbf{h}_i = (h_i^{(1)}, \cdots, h_i^{(r_i)})$ を取る. $\mathbf{b}_{i-1}$ の ∂_{i-1} による lift を $\tilde{\mathbf{b}}_{i-1}$ と表し、$\mathbf{h}_i$ の自然な全射 $Z_i \to H_i$ による lift を $\tilde{\mathbf{h}}_i$ と表すと、上の同形対応により、$\mathbf{b}_i\tilde{\mathbf{h}}_i\tilde{\mathbf{b}}_{i-1}$ が C_i の basis を成す. このとき、

$$\tau(\mathbf{C}_*;\mathbf{c}) := \prod_{i=0}^{m} \left[\mathbf{b}_i\tilde{\mathbf{h}}_i\tilde{\mathbf{b}}_{i-1}/\mathbf{c}_i\right]^{(-1)^{i+1}}$$

を $\mathbf{C}_*$ の *Reidemeister torsion* と定義する. これは $F - \{0\}$ の元である. $\mathbf{c}$ が明らかなときは $\tau(\mathbf{C}_*)$ と表す.

$\tau(\mathbf{C}_*)$ を求める際に自由度を生む要素は以下である.

① $\mathbf{c}$ の取り方.　② $\mathbf{b}$ の取り方.　③ $\mathbf{h}$ の取り方.

④ $\tilde{\mathbf{b}}$ の取り方.　⑤ $\tilde{\mathbf{h}}$ の取り方.

どの要素がどれ程の自由度を生むのか明確にしておく.

[① について] $\mathbf{C}_*$ の別の basis を $\mathbf{c}'$ とすると、

$$\frac{\tau(\mathbf{C}_*;\mathbf{c})}{\tau(\mathbf{C}_*;\mathbf{c}')} = \prod_{i=0}^{m} \left[\mathbf{c}'_i/\mathbf{c}_i\right]^{(-1)^{i+1}}$$

で、これは $F - \{0\}$ のどの元も取り得る. だから、$\mathbf{c}$ の取り方の自由度を無闇に認めると invariant としての意味を成さない.

一方、他の要素は事情が違ってくる.

Lemma 1.5. *Let* $\mathbf{b}_i$ *and* $\mathbf{h}_i$ *be fixed bases of* B_i *and* H_i*, respectively. Then the equivalence class of* $\mathbf{b}_i\tilde{\mathbf{h}}_i\tilde{\mathbf{b}}_{i-1}$ *does not depend on lifts* $\tilde{\mathbf{h}}_i$ *and* $\tilde{\mathbf{b}}_{i-1}$.

Proof $p_i = \mathrm{rank}(C_i),\ q_i = \mathrm{rank}(B_i),\ r_i = \mathrm{rank}(H_i)$ とおく. $p_i = q_i + r_i + q_{i-1}$ が成立する.

$\tilde{\mathbf{h}}'_i,\ \tilde{\mathbf{b}}'_{i-1}$ を $\mathbf{h}_i,\ \mathbf{b}_{i-1}$ の別の lift とする.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{b}_i = (b_i^{(1)}, \cdots, b_i^{(q_i)}), & \\ \tilde{\mathbf{h}}_i = (\tilde{h}_i^{(1)}, \cdots, \tilde{h}_i^{(r_i)}), & \tilde{\mathbf{h}}'_i = (\tilde{h}_i'^{(1)}, \cdots, \tilde{h}_i'^{(r_i)}), \\ \tilde{\mathbf{b}}_{i-1} = (\tilde{b}_{i-1}^{(1)}, \cdots, \tilde{b}_{i-1}^{(q_{i-1})}), & \tilde{\mathbf{b}}'_{i-1} = (\tilde{b}_{i-1}'^{(1)}, \cdots, \tilde{b}_{i-1}'^{(q_{i-1})}), \\ \mathbf{d}_i = \tilde{\mathbf{h}}'_i - \tilde{\mathbf{h}}_i = (d_i^{(1)}, \cdots, d_i^{(r_i)}), & \mathbf{e}_i = \tilde{\mathbf{b}}'_{i-1} - \tilde{\mathbf{b}}_{i-1} = (e_i^{(1)}, \cdots, e_i^{(q_{i-1})}) \end{array}$$

とおく. このとき、$d_i^{(j)} \in B_i,\ e_i^{(j)} \in Z_i \cong B_i \oplus H_i$. これより、

$$\begin{aligned} d_i^{(j)} &= \sum_{k=1}^{q_i} s_{jk} b_i^{(k)} \\ e_i^{(j)} &= \sum_{k=1}^{q_i} t_{jk} b_i^{(k)} + \sum_{l=1}^{r_i} u_{jl} \tilde{h}_i^{(l)}. \end{aligned}$$

$$S = \left(\ s_{jk}\ \right),\ T = \left(\ t_{jk}\ \right),\ U = \left(\ u_{jl}\ \right)$$

とおくと、

$$\left[\mathbf{b}_i \tilde{\mathbf{h}}'_i \tilde{\mathbf{b}}'_{i-1} / \mathbf{b}_i \tilde{\mathbf{h}}_i \tilde{\mathbf{b}}_{i-1}\right] = \det \begin{pmatrix} I_{r_i} & O & O \\ S & I_{q_i} & O \\ T & U & I_{r_{i-1}} \end{pmatrix} = 1$$

となり、示された. ∎

Lemma 1.6. *Let* $\mathbf{h}_i$ *be a fixed basis of* H_i*. Then the value* $\tau(\mathbf{C}_*; \mathbf{c})$ *does not depend on choices of* $\mathbf{b}_i$*'s.*

Proof $\mathbf{b}'_i = (b_i'^{(1)}, \cdots, b_i'^{(q_i)})$ を B_i の別の basis とする.

$$\begin{aligned} b_i'^{(j)} &= \sum_{k=1}^{q_i} s_{jk,i} b_i^{(k)} \\ \tilde{b}_{i-1}^{(j)} &= \sum_{k=1}^{q_i} t_{jk,i} b_i^{(k)} + \sum_{l=1}^{r_i} u_{jl,i} \tilde{h}_i^{(l)} + \sum_{m=1}^{q_{i-1}} s_{jm,i-1} \tilde{b}_{i-1}^{(m)}. \end{aligned}$$

$$S_i = \left(\ s_{jk,i}\ \right),\ T_i = \left(\ t_{jk,i}\ \right),\ U_i = \left(\ u_{jl,i}\ \right)$$

とおくと、S_i は $q_i \times q_i$-行列で、$S_{-1} = S_m = (\emptyset)$. T_i は $q_{i-1} \times r_i$-行列、U_i は $q_{i-1} \times q_i$-行列.

$$\prod_{i=0}^{m} \left[\mathbf{b}'_i \tilde{\mathbf{h}}_i \tilde{\mathbf{b}}'_{i-1} / \mathbf{b}_i \tilde{\mathbf{h}}_i \tilde{\mathbf{b}}_{i-1}\right]^{(-1)^{m+1}} = \prod_{i=0}^{m} \det \begin{pmatrix} S_i & O & O \\ O & I_{q_i} & O \\ T_i & U_i & S_{i-1} \end{pmatrix}^{(-1)^{m+1}}$$

$$= \det(S_{-1})^{-1}\det(S_m)^{(-1)^{m+1}} = \det(\emptyset)^{-1}\det(\emptyset)^{(-1)^{m+1}} = 1$$

となり、示された. ∎

以上のように、$\tau(\mathbf{C}_*;\mathbf{c})$ は $\mathbf{c},\mathbf{h}$ の取り方による invariant である. 次節で空間からの Reidemeister torsion を定義するとき、$\mathbf{c}$ は自然なものに取ることができて、自由度を制限することができる. $\mathbf{h}$ は各 rank (H_i) が 0 か 1 のときなら ± 1 倍の自由度が生じるのみである. この $\mathbf{h}$ も含めた Reidemeister torsion を利用した論文として、[18] を挙げておく.

以下、任意の i で rank $(H_i) = 0$、つまり $\mathbf{C}_*$ が acyclic（$\mathbf{h} = \emptyset$）の場合のみを主に考えていく. $\mathbf{C}_*$ が non-acyclic のときは $\tau(\mathbf{C}_*) = 0$ と約束する.

$$\tau(\mathbf{C}_*;\mathbf{c}) := \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=0}^{m} \left[\mathbf{b}_i\tilde{\mathbf{b}}_{i-1}/\mathbf{c}_i\right]^{(-1)^{i+1}} & (H_*(\mathbf{C}_*) = 0), \\ 0 & (H_*(\mathbf{C}_*) \neq 0). \end{cases}$$

Example 1.7. (1) $\mathbf{C}_* :\ C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0$

体 F 上の chain complex として、C_1, C_0 の basis を $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_0$ とする.

$$\mathbf{C}_* \text{ が acyclic} \iff \partial_0 \text{ が isomorphism.}$$

∂_0 が isomorphism として、$\mathbf{c}_1 = (c_1^{(1)}, \cdots, c_1^{(r)}),\ \mathbf{c}_0 = (c_0^{(1)}, \cdots, c_0^{(r)})$ とおく.

$\partial_0(c_1^{(i)}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} c_0^{(j)}$ で ∂_0 は特徴付けられ、$A = \left(\ \alpha_{ij}\ \right)$ は正則行列である.

$B_1 = 0,\ B_0 = C_0,\ B_{-1} = 0.$
$B_1 = 0,\ B_0 = C_0$ より、$\mathbf{b}_1 = \emptyset,\ \tilde{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{c}_1,$
$\tilde{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{c}_1,\ B_{-1} = 0$ より、$\mathbf{b}_0 = \partial_0(\mathbf{c}_1),\ \tilde{\mathbf{b}}_{-1} = \emptyset.$

$$\tau(\mathbf{C}_*;\mathbf{c}) = \left[\mathbf{b}_0\tilde{\mathbf{b}}_{-1}/\mathbf{c}_0\right]^{(-1)^1}\left[\mathbf{b}_1\tilde{\mathbf{b}}_0/\mathbf{c}_1\right]^{(-1)^2} = \left[\partial_0(\mathbf{c}_1)/\mathbf{c}_0\right]^{-1}\left[\mathbf{c}_1/\mathbf{c}_1\right]$$
$$= (\det A)^{-1}.$$

(2) $\mathbf{C}_* :\ C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1$

(1) と同様な設定の下、$\mathbf{C}_*$ が acyclic のとき、$\tau(\mathbf{C}_*;\mathbf{c}) = \det A.$

Multiplicity

Reidemeister torsion の計算法の唯一にして最大のテクニックと言ってもよい multiplicity について述べる.

$\mathbf{C}_*$ を体 F 上の finitely generated free chain complex、$\mathbf{C}'_*$ をその subcomplex、$\mathbf{C}''_* = \mathbf{C}_*/\mathbf{C}'_*$ を quotient chain complex とする.

$$\begin{array}{llllllllll} \mathbf{C}_*: & C_m & \xrightarrow{\partial_{m-1}} & C_{m-1} & \xrightarrow{\partial_{m-2}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_1} & C_1 & \xrightarrow{\partial_0} & C_0 \\ \mathbf{C}'_*: & C'_m & \xrightarrow{\partial'_{m-1}} & C'_{m-1} & \xrightarrow{\partial'_{m-2}} & \cdots & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_1 & \xrightarrow{\partial'_0} & C'_0 \\ \mathbf{C}''_*: & C''_m & \xrightarrow{\partial''_{m-1}} & C''_{m-1} & \xrightarrow{\partial''_{m-2}} & \cdots & \xrightarrow{\partial''_1} & C''_1 & \xrightarrow{\partial''_0} & C''_0 \end{array}$$

$\mathbf{c}_i, \mathbf{c}'_i, \mathbf{c}''_i$ をそれぞれ C_i, C'_i, C''_i の basis で、2 つの写像

$$\iota : C'_i \hookrightarrow C_i, \quad p : C_i \to C''_i$$

に関して自然なものとする. つまり、$\tilde{\mathbf{c}}''_i$ を $\mathbf{c}''_i$ の p による lift とするとき、

$$\left[\iota(\mathbf{c}'_i)\tilde{\mathbf{c}}''_i/\mathbf{c}_i\right] = 1$$

が成立するものとする. 以下これを満たしているとする.

Lemma 1.8. *If two of* $\mathbf{C}_*, \mathbf{C}'_*$ *and* $\mathbf{C}''_*$ *are acyclic, then the rest is also acyclic.*

Proof 以下のような exact sequence がある.

$$\cdots \longrightarrow H_i(\mathbf{C}'_*) \longrightarrow H_i(\mathbf{C}_*) \longrightarrow H_i(\mathbf{C}''_*) \longrightarrow \cdots$$

例えば、$\mathbf{C}'_*, \mathbf{C}''_*$ が acyclic とすると、$H_i(\mathbf{C}'_*) = 0, H_i(\mathbf{C}''_*) = 0$ なので、$H_i(\mathbf{C}_*) = 0$ となる. つまり、$\mathbf{C}_*$ も acyclic である. 他の組合せでも同様である. ∎

Lemma 1.9. *If* $\mathbf{C}_*, \mathbf{C}'_*$ *and* $\mathbf{C}''_*$ *are acyclic, then there is the natural exact sequence induced by* ι *and* p*,*

$$0 \longrightarrow B'_i \xrightarrow{f} B_i \xrightarrow{g} B''_i \longrightarrow 0 .$$

Proof f, g の well-defined 性と chain の exact 性を示す.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C'_{i+2} & \xrightarrow{\iota_{i+2}} & C_{i+2} & \xrightarrow{p_{i+2}} & C''_{i+2} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_{i+1}} & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_{i+1} & \xrightarrow{\iota_{i+1}} & C_{i+1} & \xrightarrow{p_{i+1}} & C''_{i+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_{i}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{i}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_{i}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Im}\,(\partial'_i) & (\xrightarrow{f}) & \mathrm{Im}\,(\partial_i) & (\xrightarrow{g}) & \mathrm{Im}\,(\partial_i) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \text{inclusion}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{inclusion}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{inclusion}} & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_i & \xrightarrow{\iota_i} & C_i & \xrightarrow{p_i} & C''_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Step 1. f の定義と、その単射性.

• x を $\mathrm{Im}\,(\partial'_i)$ の任意の元とすると、C'_{i+1} の元 a が存在して、$x = \partial'_i(a)$ とできる. このとき、$f(x) := \partial_i \circ \iota_{i+1}(a)$ と定義する.

• well-defined 性：

C'_{i+1} の元 b を、$x = \partial'_i(b)$ となるものとする. $\partial'_i(a-b) = 0$ より、$a - b \in \mathrm{Ker}\,(\partial'_i) = \mathrm{Im}\,(\partial'_{i+1})$. $a - b = \partial'_{i+1}(c)$ となる C'_{i+2} の元 c が存在する. $\partial_i \circ \iota_{i+1}(a-b) = \partial_i \circ \underline{\iota_{i+1} \circ \partial'_{i+1}}(c) = \underline{\partial_i \circ \partial_{i+1}} \circ \iota_{i+2}(c) = 0$ より、$\partial_i \circ \iota_{i+1}(a) = \partial_i \circ \iota_{i+1}(b)$.

• f は ι_i の制限なので、単射である.

Step 2. g の定義と、その全射性.

• y を $\mathrm{Im}\,(\partial_i)$ の任意の元とすると、C_{i+1} の元 α が存在して、$y = \partial_i(\alpha)$ とできる. このとき、$g(y) := \partial''_i \circ p_{i+1}(\alpha)$ と定義する.

• well-defined 性：

C_{i+1} の元 β を、$y = \partial_i(\beta)$ となるものとする. $\partial_i(\alpha - \beta) = 0$ より、$\alpha - \beta \in \mathrm{Ker}\,(\partial_i) = \mathrm{Im}\,(\partial_{i+1})$. $\alpha - \beta = \partial_{i+1}(\gamma)$ となる C_{i+2} の元 γ が存在する. $\partial''_i \circ p_{i+1}(\alpha - \beta) = \partial''_i \circ \underline{p_{i+1} \circ \partial_{i+1}}(\gamma) = \underline{\partial''_i \circ \partial''_{i+1}} \circ p_{i+2}(\gamma) = 0$ より、$\partial''_i \circ p_{i+1}(\alpha) = \partial''_i \circ p_{i+1}(\beta)$.

• $g \circ \partial_i = \partial''_i \circ p_{i+1}$. ∂''_i, p_{i+1} は全射なので、$g \circ \partial_i$ は全射. よって、g も全射.

Step 3. $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g)$ であること.

[$\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$]

• $g \circ f(x) = \partial''_i \circ \underline{p_{i+1} \circ \iota_{i+1}}(a) = 0$ より、$\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$.

[$\mathrm{Im}\,(f) \supset \mathrm{Ker}\,(g)$]

• $y \in \mathrm{Ker}\,(g)$ とする. $\partial_i(\alpha) = y$ となる $\alpha \in C_{i+1}$ も取る. $g \circ \partial_i(\alpha) = \partial''_i \circ p_{i+1}(\alpha) = 0$ より、$p_{i+1}(\alpha) \in \mathrm{Ker}\,(\partial''_i) = \mathrm{Im}\,(\partial''_{i+1})$. $p_{i+1}(\alpha) = \partial''_{i+1}(z)$ となる $z \in C''_{i+2}$ が存在する. p_{i+2} は全射なので、$p_{i+2}(\beta) = z$ となる $\beta \in C_{i+2}$ が存在する.

• $\alpha' = \alpha - \partial_{i+1}(\beta)$ とおくと、$\partial_i(\alpha') = \partial_i(\alpha - \partial_{i+1}(\beta)) = \partial_i(\alpha) = y$.

$p_{i+1}(\alpha') = p_{i+1}(\alpha) - \underline{p_{i+1} \circ \partial_{i+1}}(\beta) = p_{i+1}(\alpha) - \underline{\partial''_{i+1} \circ p_{i+2}}(\beta)$.

$\partial''_{i+1} \circ \underline{p_{i+2}(\beta)} = \partial''_{i+1}(z) = p_{i+1}(\alpha)$ より、$p_{i+1}(\alpha') = p_{i+1}(\alpha) - p_{i+1}(\alpha) = 0$.
これより、$\alpha' \in \mathrm{Ker}\,(p_{i+1}) = \mathrm{Im}\,(\iota_{i+1})$.

• $\alpha' = \iota_{i+1}(a')$ となる $a' \in C'_{i+1}$ が存在する. $x = \partial'_i(a') \in \mathrm{Im}\,(\partial'_i)$ とおくとき、$f(x) = \partial_i \circ \underline{\iota_{i+1}(a')} = \partial_i(\alpha') = y$ なので、$y \in \mathrm{Im}\,(f)$. ∎

Theorem 1.10. (Whitehead [30]; Turaev [25]) *If* $\mathbf{C}'_*$ *or* $\mathbf{C}''_*$ *is acyclic, then*

$$\tau(\mathbf{C}_*;\mathbf{c}) = \pm\tau(\mathbf{C}'_*;\mathbf{c}')\tau(\mathbf{C}''_*;\mathbf{c}'').$$

Proof C_i で考えるのが明らかなときは、$\iota(\mathbf{c}'_i), \tilde{\mathbf{c}}''_i$ を $\mathbf{c}'_i, \mathbf{c}''_i$ とも表すことにする. B_i, B'_i, B''_i の basis を $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}'_i, \mathbf{b}''_i$ とする. Lemma 1.9 より $\left[\mathbf{b}_i/\mathbf{b}'_i\mathbf{b}''_i\right] = 1$ と取れる.

Lemma 1.8 より、$\mathbf{C}_*$ が non-acyclic であることと、$\mathbf{C}'_*, \mathbf{C}''_*$ の少なくとも一方が non-acyclic であることとは同値である. このとき、両辺 0 で等号成立.

以下、$\mathbf{C}_*$ が acyclic を仮定する. $\mathbf{C}'_*, \mathbf{C}''_*$ の一方が acyclic のとき、Lemma 1.8 より他方も acyclic. よって 3 つとも acyclic.

$$\tau(\mathbf{C}_*;\mathbf{c}) = \prod_{i=0}^{m}\left[\mathbf{b}_i\tilde{\mathbf{b}}_{i-1}/\mathbf{c}_i\right]^{(-1)^{i+1}} = \prod_{i=0}^{m}\left[\iota(\mathbf{b}'_i)\tilde{\mathbf{b}}''_i\iota(\tilde{\mathbf{b}}'_{i-1})\tilde{\tilde{\mathbf{b}}}''_i/\iota(\mathbf{c}'_i)\tilde{\mathbf{c}}''_i\right]^{(-1)^{i+1}}$$

$$= \pm\prod_{i=0}^{m}\left[\mathbf{b}'_i\tilde{\mathbf{b}}'_{i-1}/\mathbf{c}'_i\right]^{(-1)^{i+1}}\cdot\prod_{i=0}^{m}\left[\mathbf{b}''_i\tilde{\mathbf{b}}''_{i-1}/\mathbf{c}''_i\right]^{(-1)^{i+1}} = \pm\tau(\mathbf{C}'_*;\mathbf{c}')\tau(\mathbf{C}''_*;\mathbf{c}''). \blacksquare$$

各 B'_i, B''_i の rank がわかれば、$\pm$ の特定まで可能である.

$\boxed{\text{Changing coefficients}}$

これまで chain complex $\mathbf{C}_*$ は体 F を係数としていたが、環 R を係数とする場合も考えるべきである. このときの環 R は Proposition 1.2 の直前にある条件 $(*)$ を満たすものとする. 特に環 R が integral domain のときは、$\mathbf{C}_*$ の Reidemeister torsion としては、$\mathbf{C}_*$ に商体 $Q(R)$ をテンソル積をしたものの Reidemeister torsion のこととして定義する.

$$\tau(\mathbf{C}_*) := \tau(\mathbf{C}_*\otimes Q(R)) \in Q(R)$$

一般の環 R を係数とするときは、integral domain R' への環準同形写像 $\varphi : R \to R'$ によって、$\mathbf{C}_*\otimes_R Q(R')$ の Reidemeister torsion のこととして定義する.

$$\tau^{\varphi}(\mathbf{C}_*) := \tau(\mathbf{C}_*\otimes_R Q(R'))$$

と表す.

Notation $\mathbf{C}^{\varphi}_* := \mathbf{C}_*\otimes_R Q(R'),\ H^{\varphi}_*(\mathbf{C}_*) := H_*(\mathbf{C}^{\varphi}_*),\ \tau^{\varphi}(\mathbf{C}_*) := \tau(\mathbf{C}^{\varphi}_*)$.

Remark 1.11. (1) $\tau^{\varphi}(\mathbf{C}_*) \neq 0$ は $H^{\varphi}_*(\mathbf{C}_*) = 0$ と同値.

(2) Euler 数 $\chi(\mathbf{C}_*) \neq 0$ のとき、$\tau^{\varphi}(\mathbf{C}_*) = 0$.

Example 1.12. (1) $\mathbf{C}_*: \ C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1$

$G = \langle t \mid t^3 = 1 \rangle \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z},\ R = \mathbf{Z}[G] = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t^3 - 1)$ とする．$\mathbf{C}_*$ を R 係数の chain complex とし、$\mathbf{c}_2 = (c_2^{(1)}),\ \mathbf{c}_1 = (c_1^{(1)}),\ \partial_1(c_2^{(1)}) = (t^2 + t + 1)c_1^{(1)}$ とする．このとき $\mathrm{Ker}\,(\partial_1) = (t - 1) \neq (0)$ より、$\mathbf{C}_*$ そのものは non-acyclic である．R は integral domain でないことも注意しておく．

ζ を 1 の原始 3 乗根として、$\varphi : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Q}(\zeta)$ を $\varphi(1) = 1,\ \varphi(t) = \zeta$ から決まる環準同形、$\psi : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Q}$ を $\psi(1) = \psi(t) = 1$ から決まる環準同形とする．このとき、$\mathbf{C}_*^{\varphi}$ は non-acyclic. $\mathbf{C}_*^{\psi}$ は acyclic で、$\tau^{\psi}(\mathbf{C}_*) = 3$ であることが確かめられる．

(2) $\mathbf{C}_*: \ C_3 \xrightarrow{\partial_2} C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1$

$G,\ R,\ \varphi,\ \psi$ は (1) と同じものとする．$\mathbf{C}_*$ は R 係数の chain complex で、$\mathbf{c}_3 = (c_3^{(1)}),\ \mathbf{c}_2 = (c_2^{(1)}, c_2^{(2)}),\ \mathbf{c}_1 = (c_1^{(1)}),\ \partial_2(c_3^{(1)}) = (t - 1)c_2^{(1)},\ \partial_1(c_2^{(1)}) = (t^2 + t + 1)c_1^{(1)},\ \partial_1(c_2^{(2)}) = (t^2 - 1)c_1^{(1)}$ とする．$\mathrm{Ker}\,(\partial_2) = (t^2 + t + 1) \neq (0)$ より、$\mathbf{C}_*$ そのものは non-acyclic である．

$\mathbf{C}_*^{\varphi}$ は acyclic で、$\tau^{\varphi}(\mathbf{C}_*) = \zeta + 1$. $\mathbf{C}_*^{\psi}$ は non-acyclic であることが確かめられる．

以上により、chain complex と環準同形の組合せによって acyclic 性は大きく変化することを注意しておく．

1.2. Reidemeister torsion of CW-complex

Definition 1.13. (Reidemeister torsion of a CW-complex)

X を finite CW-complex、$p : \hat{X} \to X$ を X の maximal abelian covering とする．このとき $\hat{X}$ には X から自然に誘導される CW-structure が入る．各 cell には p の covering transformation group $H = H_1(X; \mathbf{Z})$ の元が作用するので、chain complex $\mathbf{C}_*(\hat{X})$ は $\mathbf{Z}[H]$ 上の finitely generated free chain complex と見なせる (Figure 2). 環準同形 $\varphi : \mathbf{Z}[H] \to F$ に対して、$\tau(\mathbf{C}_*(\hat{X}) \otimes_{\mathbf{Z}[H]} F)$ を X の（φ に付随した）*Reidemeister torsion* と定義する．

Notation $\mathbf{C}_*^{\varphi}(X) := \mathbf{C}_*(\hat{X}) \otimes_{\mathbf{Z}[H]} F,\ H_*^{\varphi}(X) := H_*(\mathbf{C}_*^{\varphi}),$

$$\tau^{\varphi}(X) := \begin{cases} \tau(\mathbf{C}_*^{\varphi}(X)) & \in F - \{0\} \quad (H_*^{\varphi}(X) = 0), \\ 0 & \in F \quad\quad\quad\ (H_*^{\varphi}(X) \neq 0). \end{cases}$$

$\tau^{\varphi}(X)$ の自由度は、(1) $\hat{X}$ の basis の取り方と、(2) その並べ方による．(1) は $\varphi(h)$ 倍 $(h \in H)$、(2) は ± 1 倍の自由度を生む．以上により、Reidemeister torsion の値 $\tau^{\varphi}(X)$ は、$\pm\varphi(h)$ 倍 $(h \in H)$ の自由度をもって定義される．

CW-pair (X, Y) に対して、$\tau^{\varphi}(X, Y) := \tau(\mathbf{C}_*^{\varphi}(X, p^{-1}(Y)))$ を (X, Y) の Reidemeister torsion と定義する. 自由度も同様である.

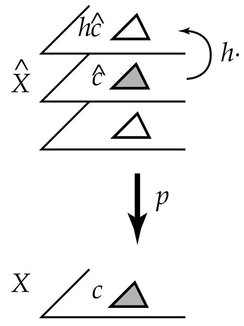

Figure 2: the maximal abelian covering of X

Theorem 1.14. [25] *Let (X, Y) be a finite CW-pair, $j : Y \hookrightarrow X$ the natural inclusion, and $\varphi : \mathbf{Z}[H_1(X; \mathbf{Z})] \to R$ a ring homomorphism. If $\tau^{\varphi\circ j}(Y) \neq 0$ or $\tau^{\varphi}(X, Y) \neq 0$, then*

$$\tau^{\varphi}(X) = \tau^{\varphi}(X, Y) \cdot \tau^{\varphi\circ j}(Y).$$

Proof $\mathbf{C}_* = \mathbf{C}_*^{\varphi}(X)$, $\mathbf{C}'_* = \mathbf{C}_*^{\varphi\circ j}(Y)$, $\mathbf{C}''_* = \mathbf{C}_*^{\varphi}(X, Y)$ とおくと、$\mathbf{C}''_* = \mathbf{C}_*/\mathbf{C}'_*$ である. Theorem 1.10 より、成立する. ▮

Theorem 1.14 も重要だが、以下の切除性質の方がより重要である.

Theorem 1.15. (excision) [25] *Let X be a finite CW-complex, X_1 and X_2 subcomplexes of X such that $X_1 \cup X_2 = X$, and $Y = X_1 \cap X_2$. Let $j : \mathbf{Z}[Y] \to \mathbf{Z}[X]$ and $j_i : \mathbf{Z}[X_i] \to \mathbf{Z}[X]$ $(j = 1, 2)$ be homomorphisms induced by the natural inclusions, and $\varphi : \mathbf{Z}[H_1(X; \mathbf{Z})] \to R$ a ring homomorphism. If $\tau^{\varphi\circ j}(Y) \neq 0$, then*

$$\tau^{\varphi}(X) = \tau^{\varphi\circ j_1}(X_1) \cdot \tau^{\varphi\circ j_2}(X_2) \cdot (\tau^{\varphi\circ j}(Y))^{-1}.$$

Proof $\mathbf{C}'_* = \mathbf{C}_*^{\varphi\circ j}(Y)$, $\mathbf{C}_* = \mathbf{C}_*^{\varphi\circ j_1}(X_1) \oplus \mathbf{C}_*^{\varphi\circ j_2}(X_2) = \mathbf{C}_*^{\varphi\circ(j_1 \amalg j_2)}(X_1 \amalg X_2)$, $\mathbf{C}''_* = \mathbf{C}_*^{\varphi}(X)$ とおくと、

$$0 \to \mathbf{C}'_* \xrightarrow{j} \mathbf{C}_* \xrightarrow{j_1 - j_2} \mathbf{C}''_* \to 0$$

は Mayer-Vietoris exact sequence である．Theorem 1.10 より、成立する．∎

まだこの時点では $\tau^{\varphi}(X)$ は X の CW-structure に付随した invariant である．じつは simple homotopy invariant をであること示すのが以下の定理である．

Theorem 1.16. [25] *Let X and X' be finite CW-complexes, $f : X \to X'$ a simple homotopy map, $\varphi' : \mathbf{Z}[H_1(X)] \to R$ a ring homomorphism, and $\varphi = \varphi' \circ f_*$. Then*
$$\tau^{\varphi}(X) = \tau^{\varphi'}(X').$$

Proof 任意の simple-homotopy は elementary simple homotopy の有限列で実現されるので、f が X から X' への elementary simple homotopy と仮定して示す．X の $(n-1)$-cell e を底面として、外部の点 x からの cone を張ることにより f を実現する (Figure 3).

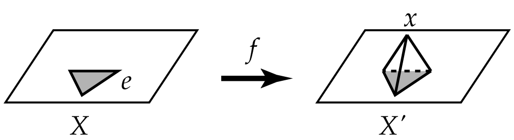

Figure 3: elementary simple homotopy

Theorem 1.14 より、$\tau^{\varphi'}(X') = \tau^{\varphi}(X) \cdot \tau^{\varphi'}(X', f(X))$. $e_n = x * e$ とおくと、$\tau^{\varphi'}(X', f(X)) = \tau^{\varphi'}(e_n, e)$ なので、$\tau^{\varphi'}(e_n, e) = 1$ を示せばよい．特に、$n = 3$ のときのみを示す．一般の場合も同様である．

$$C_3 \xrightarrow{\partial_2} C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0$$

を CW-pair (e_3, e) から誘導される chain complex とする．

$\mathbf{c}_3 = (e_3),\ \mathbf{c}_2 = (e_2^{(1)}, e_2^{(2)}, e_2^{(3)}),\ \mathbf{c}_1 = (e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, e_1^{(3)}),\ \mathbf{c}_0 = (x)$ とするとき、
$\partial_2(e_3) = e_2^{(1)} + e_2^{(2)} + e_2^{(3)}$,
$\partial_1(e_2^{(1)}) = e_1^{(1)} - e_1^{(2)},\ \partial_1(e_2^{(2)}) = e_1^{(2)} - e_1^{(3)},\ \partial_1(e_2^{(3)}) = e_1^{(3)} - e_1^{(1)}$,
$\partial_0(e_1^{(1)}) = \partial_0(e_1^{(2)}) = \partial_0(e_1^{(3)}) = x$.
このとき、$\mathbf{b}_3 = \emptyset,\ \tilde{\mathbf{b}}_2 = (e_3),\ \mathbf{b}_2 = (\partial_2(e_3)),\ \tilde{\mathbf{b}}_1 = (e_2^{(2)}, e_2^{(3)})$,
$\mathbf{b}_1 = (\partial_1(e_2^{(2)}), \partial_1(e_2^{(3)})) = (e_1^{(2)} - e_1^{(3)}, e_1^{(3)} - e_1^{(1)}),\ \tilde{\mathbf{b}}_0 = (e_2^{(3)})$,
$\mathbf{b}_0 = (\partial_0(e_2^{(3)})),\ \tilde{\mathbf{b}}_{-1} = \emptyset$
と取ることができ、$\tau^{\varphi'}(e_n, e) = 1$ と求められる．∎

CW-pair (X, Y) の Reidemeister torsion $\tau^{\varphi}(X, Y)$ も simple homotopy invariant であることは同様に示すことができる.

Corollary 1.17. [25] *The value $\tau^{\varphi}(X)$ is independent of subdivision.*

Proof 重心細分を simple homotopy で実現する. X を n 次元 CW-complex とするが、simplicial complex として示せば充分である. X の i 次元以下の cell 全体を X_i とする. 各 cell の内点を 1 点ずつ取っていき、X_n から順に細分していく.

Step 1. n-cell e と点 x との cone $x * e$ を取り、生じた $(n+1)$-cell を e 側からつぶす. これは、simple homotopy で実現する (Figure 4).

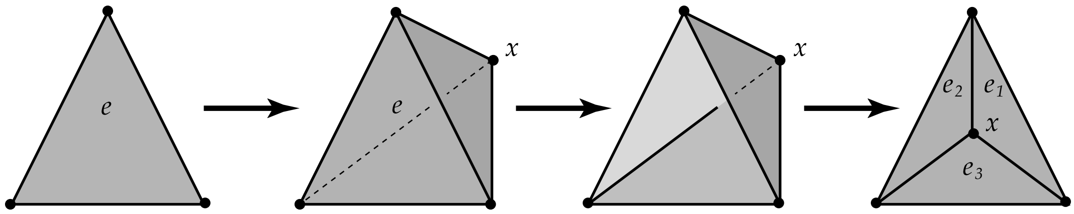

Figure 4: subdivision I

Step 2. 次の段階で Figure 5 の細分をしたい. X_1 の細分までたどり着いたとき、結果が重心細分になっている.

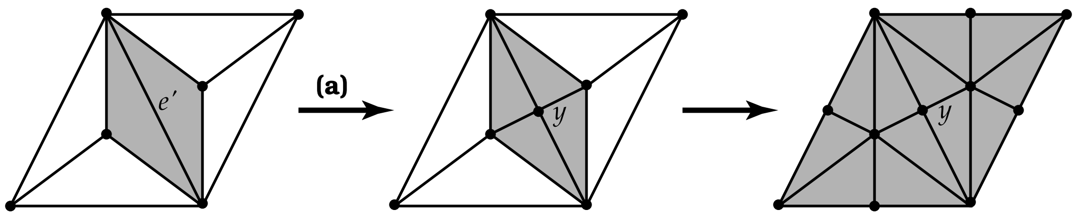

Figure 5: subdivision II

Step 3. (a) を詳しく見る.

$(n-1)$-cell e' を共有する cell 全体と、点 y との cone を取り、底面（この場合感覚的な用語）から次元の高い cell の順につぶしていく (Figure 6).

以降も同様にしていく. ∎

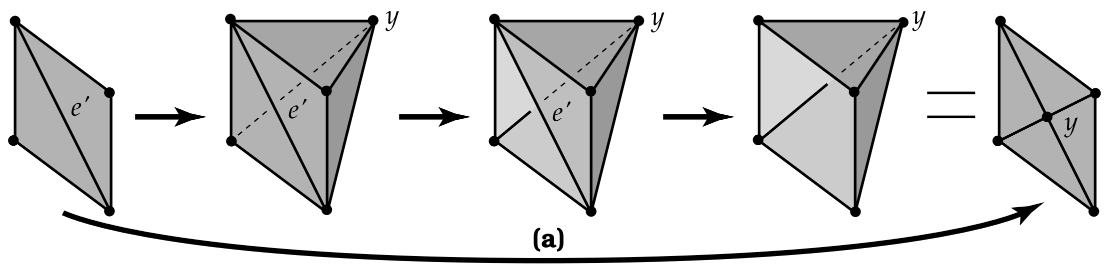

Figure 6: subdivision III

以上により、Reidemeister torsion が simple homotopy invariant であることと、細分で不変であることを示せた．しかしこれでも cell decomposition によっている．A. Chapman [2] は以下を示した．

Theorem 1.18. (Chapman [2]) *Any simple homotopy invariant is a topological invariant.*

この証明には、無限次元の立方体を用いる． 筆者の理解を超えているので説明不可能である．とにかくこの定理により、Reidemeister torsion は topological invariant であることが保証された．

ここで、以降の議論に不可欠な 2 つの例を挙げておく．

Example 1.19. (1) $X = S^1$

$H_1(S^1) = \langle t \rangle \cong \mathbf{Z}$, $p : \hat{X} \to X$ を maximal abelian covering とする．S^1 を、1 つの 0-cell c_0、1 つの 1-cell c_1 に分割する．lift も同じ記号を使うことにする (Figure 7 (1)).

$$\mathbf{C}_* : \ C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0$$

を S^1 の分割から決まる $\hat{X}$ ($\cong \mathbf{R}^1$) の chain complex とする．

$\mathbf{c}_1 = (c_1)$, $\mathbf{c}_0 = (c_0)$, $\partial_0(c_1) = (t-1)c_0$ である．

$\mathbf{b}_1 = \emptyset$, $\tilde{\mathbf{b}}_0 = (c_1)$, $\mathbf{b}_0 = (\partial_0(c_1)) = ((t-1)c_0)$, $\tilde{\mathbf{b}}_{-1} = \emptyset$ より、

$$\tau(S^1) = (t-1)^{-1}.$$

(2) $X = S^1 \times S^1$

$H_1(S^1 \times S^1) = \langle g, h \rangle \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, $p : \hat{X} \to X$ を maximal abelian covering とする．$S^1 \times S^1$ を、1 つの 0-cell c_0、2 つの 1-cell c_1^1, c_1^2、1 つの 2-cell c_2 に分

割する. lift も同じ記号を使うことにする (Figure 7 (2)).

$$\mathbf{C}_*:\ C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0$$

を $S^1 \times S^1$ の分割から決まる $\hat{X}$ ($\cong \mathbf{R}^2$) の chain complex とする.
$\mathbf{c}_2 = (c_2),\ \mathbf{c}_1 = (c_1^1, c_1^2)\mathbf{c}_0 = (c_0)$,
$\partial_1(c_2) = (1-h)c_1^1 + (g-1)c_1^2$,
$\partial_0(c_1^1) = (g-1)c_0,\ \partial_0(c_1^2) = (h-1)c_0$ である.
$\mathbf{b}_2 = \emptyset,\ \tilde{\mathbf{b}}_1 = (c_2),\ \mathbf{b}_1 = (\partial_1(c_2)) = ((1-h)c_1^1 + (g-1)c_1^2),\ \tilde{\mathbf{b}}_0 = (c_1^1)$,
$\mathbf{b}_0 = (\partial_0(c_1^1)) = ((g-1)c_0),\ \tilde{\mathbf{b}}_{-1} = \emptyset$ より、

$$\tau(S^1 \times S^1) = -1.$$

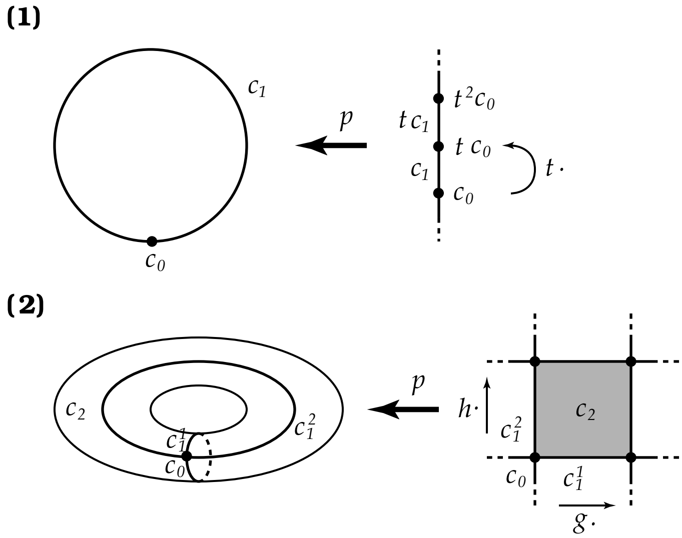

Figure 7: the maximal abelian coverings of S^1 and $S^1 \times S^1$

Proposition 1.20. (1) *Let t be a generator of $H_1(S^1)$, and $\varphi : \mathbf{Z}[t, t^{-1}] \to R$ a ring homomorphism. Then $\mathbf{C}_*^{\varphi}(S^1)$ is acyclic if and only if $\varphi(t) - 1$ is not zero divisor in R. If $\mathbf{C}_*^{\varphi}(S^1)$ is acyclic, then $\tau^{\varphi}(S^1) = (\varphi(t) - 1)^{-1}$.*

(2) *Let t_1 and t_2 be generators of $H_1(S^1 \times S^1)$, and $\varphi : \mathbf{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}] \to R$ a ring homomorphism. Then $\mathbf{C}_*^{\varphi}(S^1 \times S^1)$ is acyclic if and only if $\varphi(t_1) - 1$ or*

$\varphi(t_2)-1$ *is not zero divisor in* R*. If* $\mathbf{C}^{\varphi}_{*}(S^1 \times S^1)$ *is acyclic, then* $\tau^{\varphi}(S^1 \times S^1) = 1$.

Example 1.21. (1) $\varphi : \mathbf{Z}[t, t^{-1}] \to \mathbf{Z}[s, s^{-1}]/(s^n - 1)$ を $\varphi(t) = s$ で決まる環準同形とする．$(s-1)(s^{n-1} + \cdots + s + 1) = s^n - 1 = 0$ より、$\varphi(t) - 1 = s - 1$ は zero divisor である．

(2) $\varphi : \mathbf{Z}[t, t^{-1}] \to \mathbf{Q}(\zeta)$ を $\varphi(t) = \zeta$ で決まる環準同形とする．ここで、ζ は 1 の原始 n 乗根である．$\varphi(t) - 1 = \zeta - 1$ は zero divisor ではない．

(3) $\varphi : \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t^n - 1) \to \mathbf{Q}(\zeta)$ を $\varphi(t) = \zeta$ で決まる環準同形とする．ここで、ζ は 1 の原始 n 乗根である．$\varphi(t) - 1 = \zeta - 1$ は zero divisor ではない．

(4) $\psi_d : \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t^n - 1) \to \mathbf{Q}(\zeta)$ を $\psi_d(t) = \zeta$ で決まる環準同形とする．ここで、ζ は 1 の原始 d 乗根である．d (≥ 2) が n の約数のとき ψ_d は well-defined で、$\psi_d(t) - 1 = \zeta - 1$ は zero divisor ではない．

1.3. Milnor torsion and the Alexander polynomial

この節は基本的に証明を与えない．証明は Turaev [25], [26], [27] を参照のこと．

Definition 1.22. (Milnor torsion)

X を finite CW-complex とし、$H := H_1(X)$, $G := H/\mathrm{Tor}\,(H)$ とおく．$\mathrm{pr} : \mathbf{Z}[H] \to \mathbf{Z}[G]$ を自然な全射とする．このとき、$\tau^{\mathrm{pr}}\,(X)$ を *Milnor torsion* と定義する．

$\mathbf{Z}[G]$ は integral domain である．

Definition 1.23. (Fox derivative)

$F := \langle x_1, \cdots, x_m \rangle$ を $x_1, \cdots, x_m$ で生成する free group とする．任意の $r \in F$ は $\mathbf{Z}[F]$ の中で

$$r = 1 + \sum_{j=1}^{m} f_j (x_j - 1) \qquad (f_j \in \mathbf{Z}[F])$$

と一意的に表される．このときの各 f_j を

$$f_j = \frac{\partial r}{\partial x_j}$$

と表す．そして、これを $\mathbf{Z}[F]$ に拡張したものを *Fox derivative* と定義する．つまり、

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbf{Z}[F] \to \mathbf{Z}[F]$$

を

(1) $r \in F$ のとき $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)(r) = \dfrac{\partial r}{\partial x_j}$,

(2) $a, b \in \mathbf{Z},\ u, v \in \mathbf{Z}[F]$ のとき $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)(au + bv) = a\dfrac{\partial u}{\partial x_j} + b\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$

で定める．このとき、以下が成立する．

(i) $\dfrac{\partial c}{\partial x_j} = 0 \qquad (c \in \mathbf{Z})$,

(ii) $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \qquad$ (δ_{ij} は Kronecker の delta),

(iii) $\dfrac{\partial (uv)}{\partial x_j} = u\dfrac{\partial v}{\partial x_j} + v(1, \cdots, 1)\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \qquad (u, v \in \mathbf{Z}[F])$,

(iv) $\dfrac{\partial r^{-1}}{\partial x_j} = -r^{-1}\dfrac{\partial r}{\partial x_j} \qquad (r \in F)$.

Definition 1.24. (Elementary ideal, Alexander polynomial)

$F = \langle x_1, \cdots, x_m \rangle$ を free group、$\pi = \langle x_1, \cdots, x_m \mid r_1, r_2, \cdots \rangle$ を finitely generated group とする．$p : \mathbf{Z}[F] \to \mathbf{Z}[\pi]$ を natural projection、$\alpha : \mathbf{Z}[\pi] \to \mathbf{Z}[H]$ を abelianization が誘導する homomorphism、$\eta = \alpha \circ p$ とする．このとき、

$$A(\pi) := \left(\ \eta\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \ \right)_{i=1,\cdots;\ j=1,\cdots,m}$$

を π の *Alexander matrix* という．

$A(\pi)$ の $(m-1)$-小行列式で生成される $\mathbf{Z}[H]$ の ideal $E(\pi)$ を π の *elementary ideal* といい、

$$\Delta(\pi) := \gcd(\mathrm{pr}\,(E(\pi)))$$

を π の *Alexander polynomial* という．各々π の presentation によらず一意的に決まる．ただし、$\Delta(\pi)$ は $\pm\mathrm{pr}\,(h)$ $(h \in H)$ 倍の自由度がある．

位相空間 X の *Alexander-Fox polynomial* は、

$$\Delta(X) := \Delta(\pi_1(X))$$

と定義する．X が homology 3-sphere Σ 内の n 成分 link L のとき、各 meridian が代表する H の元を $t_1, \cdots, t_n$ として、

$$\Delta_L(t_1, \cdots, t_n) := \Delta(\overline{\Sigma - N(L)})$$

を L の *Alexander polynomial* とする.

Example 1.25. (1) $\pi = \mathbf{Z} = \langle x \mid \cdot \rangle = \langle x, y \mid r = y \rangle$

$H = \langle t \rangle \cong \mathbf{Z}$. $\dfrac{\partial r}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = 1$ より、$A(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$E(\mathbf{Z}) = (1) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ より、$\mathit{\Delta}(\mathbf{Z}) = 1$.

これは trivial knot の Alexander polynomial が 1 であることを示す.

(2) $\pi = \langle x, y \mid r = x^p y^q \rangle \qquad (p, q) = 1;\ p, q \geq 2$

$H = \langle t \rangle \cong \mathbf{Z}$ で、$\eta(x) = t^q,\ \eta(y) = t^{-p}$ と対応する.

$\dfrac{\partial r}{\partial x} = x^{p-1} + \cdots + x + 1 = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$,

$\dfrac{\partial r}{\partial y} = x^p(y^{q-1} + \cdots + y + 1) = x^p \dfrac{y^q - 1}{y - 1}$.

$$E(\pi) = \left\langle \frac{t^{pq} - 1}{t^q - 1},\ t^{pq} \frac{t^{-pq} - 1}{t^{-p} - 1} \right\rangle, \qquad \mathit{\Delta}(\pi) = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}.$$

これは (p, q)-torus knot の Alexander polynomial を表す.

Definition 1.26. (Order of a module)

K を commutative ring、H を finitely generated K-module とする. このとき、$f : K^m \to K^n$ K-homomorphism で、Coker $(f) \cong H$、n が有限であるものが存在する. m は無限かも知れないことに注意する.

$$K^m \xrightarrow{f} K^n \to H \to 0\ , \quad \text{exact}$$

K が Noetherian ならば m を有限に取れる.

A を f の $m \times n$-presentation matrix、$E(H)$ を A の n 次小行列式で生成される K の ideal とする. これは H の presentation によらず一意的に決まる. K が unique factorization domain (UFD) のとき、

$$\mathrm{ord}\,(H) := \gcd(E(H))$$

と定義する. H の *order* という. これは $\pm u$ (u は H の unit) 倍の自由度で決まる.

Example 1.27. $K = \mathbf{Z},\ H = \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/b\mathbf{Z} \quad (a, b > 0)$

H の presentation matrix は $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ なので、$\mathrm{ord}\,(H) = ab$.

X を finite CW-complex、$H := H_1(X)$, $G := H/\mathrm{Tor}\,(H)$, $\mathrm{pr}\ : \mathbf{Z}[H] \to \mathbf{Z}[G]$ を natural projection とする．$\mathbf{Z}[G]$ は $\mathbf{Z}$ 上の有限次 Laurent 多項式環なので、Noetherian UFD である．よって、finitely generated $\mathbf{Z}[G]$-module M に対して $\mathrm{ord}\,(M)$ は well-defined である．

Definition 1.28. (Alexander function)
$q : \tilde{X} \to X$ を maximal free abelian covering で、$\mathbf{C}^{\mathrm{pr}}_*(X) = \mathbf{C}_*(\tilde{X})$ は finitely generated $\mathbf{Z}[G]$-chain complex である．このとき、

$$A(X) := \prod_{i=0}^{m} [\mathrm{ord}\,(H^{\mathrm{pr}}_i(X))]^{(-1)^{i+1}} \in Q(\mathbf{Z}[G])$$

を X の *Alexander function* と定義する．これは $\pm g$ $(g \in G)$ 倍の自由度で決まる．$\mathbf{C}^{\mathrm{pr}}_*(X)$ が non-acyclic であれば、$A(X) = 0$ とする．また、finite CW-pair (X, Y) に対して、$A(X, Y)$ も同様に定義できる．

Example 1.29. (1) $X = S^1$
$H^{\mathrm{pr}}_1(X) = 0$, $H^{\mathrm{pr}}_0(X) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t-1)$.
$\mathrm{ord}\,(H^{\mathrm{pr}}_1(X)) = 1$, $\mathrm{ord}\,(H^{\mathrm{pr}}_0(X)) = t-1$. $\quad A(S^1) = (t-1)^{-1}$.

(2) $X = S^1 \times S^1$
$H^{\mathrm{pr}}_2(X) = 0$, $H^{\mathrm{pr}}_1(X) = 0$, $H^{\mathrm{pr}}_0(X) = \mathbf{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]/(t_1 - 1, t_2 - 1)$.
$\mathrm{ord}(H^{\mathrm{pr}}_2(X)) = \mathrm{ord}(H^{\mathrm{pr}}_1(X)) = 1$, $\mathrm{ord}(H^{\mathrm{pr}}_0(X)) = \gcd(t_1 - 1, t_2 - 1) = 1$.
$A(S^1 \times S^1) = 1$.

以下の定理は重要である．

Theorem 1.30. (Turaev [25]) *Let (X, Y) be a finite CW-pair. Then*

$$\tau^{\mathrm{pr}}(X, Y) = A(X, Y).$$

これにより、Alexander function が Milnor torsion の第 2 の定義と見なすことができる．これの証明には、*matrix τ-chain* という道具を用いる．いかにもこれの証明のためだけに作られた道具で、他に応用はなさそうだが、なかなか味わいのある証明である．線形代数の延長と言ってもよい．

次は、3-dimensional manifold において Milnor torsion と Alexander polynomial の関係を述べた重要な定理である．

Theorem 1.31. (Turaev [25], [27]) *Let M be a connected compact 3-dimensional manifold with $\chi(M) = 0$, and $H = H_1(M)$. If* $\mathrm{rank}\,(H) \geq 2$, *then* $\tau^{\mathrm{pr}}(M) =$

$\varDelta(M)$. *If* $\operatorname{rank}(H)=1$ *and* $H/\operatorname{Tor}(H)=\langle t\rangle \cong \mathbf{Z}$, *then*

$$\tau^{\mathrm{pr}}(M)=\begin{cases} \varDelta(M)\cdot(t-1)^{-1} & (\partial M\neq\emptyset \text{ or } w_1(\operatorname{Tor}(H))\neq 1),\\ \varDelta(M)\cdot(t-1)^{-2} & (\partial M=\emptyset, \text{ and } w_1(H)=1),\\ \varDelta(M)\cdot(t^2-1)^{-1} & (\partial M=\emptyset, w_1(\operatorname{Tor}(H))=1, \text{ and } w_1(H)\neq 1).\end{cases}$$

これの証明法は、多様体の Poincaré duality を用いる. 以下、状況を絞っていく.

Corollary 1.32. *Let* Σ *be a homology* 3*-sphere,* K *a knot in* Σ*, and* $H_1(\overline{\Sigma - N(K)}) = \langle t\rangle \cong \mathbf{Z}$. *Then*

$$\tau(\overline{\Sigma - N(K)}) = \varDelta_K(t)(t-1)^{-1}.$$

Proof Theorem 1.31 で、$\operatorname{rank}(H)=1$, $\partial M\neq\emptyset$ の場合である. ∎

Notation (1) Homology 3-sphere Σ 内の knot K に沿って p/q-surgery した結果の多様体を $\Sigma(K;p/q)$ と表す.

(2) d (≥ 2) を p の約数とし、ζ を 1 の原始 d 乗根とする. このとき、ψ_d : $\mathbf{Z}[t,t^{-1}]/(t^p-1)\to\mathbf{Q}(\zeta)$ ring homomorphism を $\psi_d(t)=\zeta$ から導かれるものとする.

Corollary 1.33. (Turaev [24], [25], [26]) *Let* p *and* q *be integers satisfying* $(p,q)=1, |p|\geq 2$ *and* $q\neq 0$, d (≥ 2) *a divisor of* p*, and* ζ *a primitive* d*-th root of unity. Then*

$$\tau^{\psi_d}(\Sigma(K;p/q)) = \varDelta_K(\zeta)(\zeta-1)^{-1}(\zeta^{\bar q}-1)^{-1},$$

where $q\bar q\equiv 1 \pmod p$.

Proof Theorem 1.15 (excision), Proposition 1.20 と Corollary 1.32 より導かれる. ∎

1 の p 乗根だけを調べるのではなく、あらゆる p の約数 d 乗根で調べることが後に効いてくる (Main Theorem 2 の証明を参照). 特に K を trivial knot とすると以下が導かれる.

Theorem 1.34. (Reidemeister [20]; Franz [6]) *Let* $L(p,q)$ *be the* (p,q)*-lens space. Then*

$$\tau^{\psi_d}(L(p,q)) = (\zeta-1)^{-1}(\zeta^{\bar q}-1)^{-1},$$

where $q\bar q\equiv 1 \pmod p$.

後で出てくるFranzの定理 (Theorem 2.4) を用いることにより、lens space の分類定理を導くことができる.

Theorem 1.35. (Reidemeister [20]; Franz [6]; Brody [1]; Przytycki-Yasuhara [19]) *Two lens spaces* $L(p,q)$ *and* $L(p',q')$ *are homeomorphic if and only if* (1) $p = p'$, *and* (2) $q \equiv \pm q' \pmod p$ *or* $qq' \equiv \pm 1 \pmod p$.

Reidemeister torsion は少なくとも lens space に対しては完全な invariant である. 他の homology lens space に対してどれ程効力があるかを調べるのがこの稿のテーマである.

1.4. Examples

いくつか計算例を挙げる.

Example 1.36. (1) $X = S^1 \times S^2$

$H_1(S^1 \times S^2) = \langle t \rangle \cong \mathbf{Z}$. $X = S^1 \times S^2$ を2つのsolid torus T_1, T_2 ($\cong S^1 \times D^2$) の和に分割する (Figure 8).

$H_1(T_i) = \langle t_i \rangle \cong \mathbf{Z}$ $(i = 1, 2)$, $T_1 \cap T_2 = \partial T_1 = \partial T_2 \cong S^1 \times S^1$.

$T_1 \cap T_2 \hookrightarrow T_1,\ T_1 \cap T_2 \hookrightarrow T_2$ を介して、$H_1(X)$ で $t_1 = t_2 = t$ の関係式が入る.

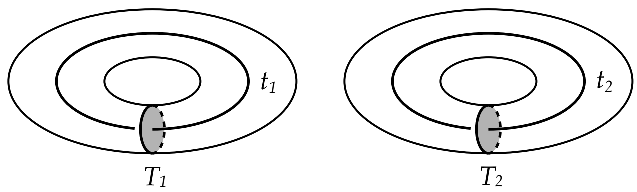

Figure 8: decomposition of $S^1 \times S^2$

$$\tau(S^1 \times S^2) = (t_1 - 1)^{-1}(t_2 - 1)^{-1} \cdot 1^{-1}|_{t_1 = t_2 = t} = (t - 1)^{-2}.$$

(2) $X = S^1 \times S^n$ $(n \geq 2)$

$H_1(S^1 \times S^n) = \langle t \rangle \cong \mathbf{Z}$.

(1) と同様にするが、n についての帰納法で以下の結果を示す方法がよい.

$$\tau(S^1 \times S^n) = \begin{cases} (t-1)^{-2} & (n \text{ は偶数}) \\ 1 & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

結果的に、$n = 1$ の場合でも正しくなっている.

(3) $X=S^1\times B_n$ (B_n は、n 個の 1-cell、1 個の 0-cell よりなるブーケ. $n\geq 2$)

$H_1(S^1\times B_n)=H_1(S^1)\oplus H_1(B_n)=\langle t\rangle\oplus\langle t_1,\cdots,t_n\rangle=\langle t,t_1,\cdots,t_n\rangle\cong\mathbf{Z}^{n+1}$.
t は $H_1(S^1)$ の生成元、t_i $(i=1,\cdots,n)$ は各 B_n の 1-cell に対応する元とする.
$S^1\times B_n$ は、n 個の torus を longitude に沿って接着した空間と見なせる.

$$\tau(S^1\times B_n)=(t-1)^{n-1}.$$

これも結果的に、$n=1$ の場合でも正しくなっている.

(4) $X=S^1\times Y$

(2), (3) より、

$$\tau(S^1\times Y)=(t-1)^{-\chi(Y)}.$$

ここで $\chi(Y)$ は、Y の Euler number である.

証明は、Y の cell 分割をして、Y の cell を e とするとき、$S^1\times e$ を低い次元の順に接着していく手法である. その際、偶数と奇数で状況が異なることに注意.

これより、S^3 内の fibred knot complement が trivial bundle になるのは、trivial knot complement のときのみである.

(5) $X=$Klein bottle

$H_1(X)\cong\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2,\ H_1(X)/\mathrm{Tor}\,(H_1(X))=\langle t\rangle\cong\mathbf{Z}$.

torus と同様な分割だが、$\mathbf{Z}$-covering であることに注意.

$$\tau(X)=1\cdot(t+1)\cdot(t+1)^{-1}=1.$$

(6) $X=S^1$ 上の B_n-bundle で、$\mathrm{rank}\,(H_1(X))=1$ となるもの.

$f:B_n\to B_n$ を monodromy map とする. (Figure 9)

$f_*:H_1(B_n)\to H_1(B_n)$ は isomorphism になる. 自明な basis により f_* を表現したものを A とする. このとき、$\det(A)=\pm1$.

I を単位行列として、$r=\mathrm{rank}\,(A-I)$ とおくと、$H_1(X)/\mathrm{Tor}\,(H_1(X))\cong\mathbf{Z}^{n+1-r}$.

$\mathrm{rank}\,(H_1(X))=1\iff r=n$、である.
2-cell を σ_i、1-cell を τ_i,α、0-cell を x とする.
$\partial(\sigma_i)=tf_*(\tau_i)-\tau_i$,
$\partial(\tau_i)=0,\ \partial(\alpha)=(t-1)x$.

$$\tau(X)=(t-1)^{-1}\det(tA-I).$$

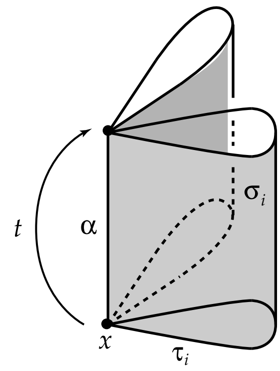

Figure 9:

特にこれより、fibred knot の最高次の係数が ± 1 であることと、Alexander polynomial の次数の 1/2 が、minimal genus と一致することがわかる.

(7) $X = (p, q)$-torus knot complement
$H_1(X) = \langle t \rangle \cong \mathbf{Z}$.
S^3 を 2 つの solid torus T_1, T_2 の和に分割する. (p, q)-torus knot K は、$\partial T_1 = \partial T_2$ の上に乗っていると見る. このとき K の近傍 $N(K)$ は、T_1, T_2 を削る. その削られた結果も solid torus で、それらを X_1, X_2 とする. $X = X_1 \cup X_2$ で、$X_1 \cap X_2$ は annulus である.

X_1 の core を l_1、meridean を m_1、
X_2 の core を l_2、meridean を m_2 とすると、
$H_1(X_1 \cap X_2) \cong \mathbf{Z}$ の生成元が、$[l_1]^p[m_1]^q$ または $[l_2]^q[m_2]^p$ と表される.
$[m_1] = 1,\ [m_2] = 1$ である. $[l_1] = t_1,\ [l_2] = t_2$ とおく.

$\tau(X_1) = (t_1 - 1)^{-1},\ \tau(X_2) = (t_2 - 1)^{-1}$.
$H_1(X)$ では、$t_1^p = t_2^q$ である.
$t_1 = t^q,\ t_2 = t^p$ とすると、$t_1^p = t_2^q = t^{pq}$ が成立.
$\tau(X_1) = (t^q - 1)^{-1},\ \tau(X_2) = (t^p - 1)^{-1},\ \tau(X_1 \cap X_2) = (t^{pq} - 1)^{-1}$.

$$\tau(X) = (t^p - 1)^{-1}(t^q - 1)^{-1}(t^{pq} - 1).$$

これより、(p, q)-torus knot の Alexander polynomial は

$$\Delta(X) = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}.$$

2. Rational surgery along a torus knot

2.1. Moser's Theorem

Main Theorem 1 の動機となった定理を述べる. S^3 内の torus knot に沿う rational surgery の結果の多様体を分類したものである.

Theorem 2.1. (Moser [16]; Gordon [8]; Shimozawa [23]) *Let $K_{r,s}$ be the (r,s)-torus knot in S^3, and $M = S^3(K_{r,s}; p/q)$ the result of p/q-surgery along $K_{r,s}$ where $|p|, |r|, |s| \geq 2$ and $q \neq 0$. Then there are three cases* :

(1) *If $|p - qrs| \neq 0$, then M is a Seifert fibered space with three singular fibers of multiplicities $|r|, |s|$ and $|p - qrs|$. In particular,*

(2) *if $|p - qrs| = 1$, then M is the lens space $L(p, qr^2)$* (Figure 1).

(3) *If $|p - qrs| = 0$ $(p/q = rs)$, then M is the connected sum of two lens spaces, $L(r, s) \sharp L(s, r)$.*

Reidemeister torsion を用いてこの結果にどれ程迫れるのか探っていく. Figure 1 (p4) は、$(2,3)$-torus knot (trefoil) $K_{2,3}$ の 5-surgery の結果が lens space $L(5,1)$ になることを表している (cf. [21], [23]). これらの Reidemeister torsion は一致するはずである. $M = S^3(K_{2,3}; 5)$、ζ を 1 の原始 5 乗根として Reidemeister torsion を計算する. Corollary 1.33, Theorem 1.34 より、

$$\tau^{\psi_5}(M) = (\zeta^2 - \zeta + 1)(\zeta - 1)^{-2}, \quad \tau^{\psi_5}(L(5,1)) = (\zeta - 1)^{-2}.$$

これらの式は見かけ上違うものに見える. Reidemeister torsion は $\pm\zeta^m$ 倍の違いで定義されるので、

$$\zeta^2 - \zeta + 1 = \pm\zeta^m$$

が成り立つのではないか、と思うかも知れない. しかし、

$$|\zeta^2 - \zeta + 1| = |1 - 2\cos(2\pi k/5)| \neq |\pm\zeta^m| = 1$$

より、それは否定される. それではどうすれば同一視できるのだろうか？実は、(p,q)-torus knot の Alexander polynomial の公式までさかのぼると次の変形ができる. ($\zeta^5 = 1$ も使う.)

$$\tau^{\psi_5}(M) = (\zeta^2 - \zeta + 1)(\zeta - 1)^{-2} = \frac{(\zeta^6 - 1)(\zeta - 1)}{(\zeta^3 - 1)(\zeta^2 - 1)}(\zeta - 1)^{-2}$$

$$= \frac{(\zeta - 1)(\zeta - 1)}{(\zeta^{-2} - 1)(\zeta^2 - 1)}(\zeta - 1)^{-2} = -\zeta^2(\zeta^2 - 1)^{-2}.$$

はじめの $-\zeta^2$ はともかく、ζ を ζ^2 に置きかえた形で同一視できる．つまり、ψ_5 の取り方にも自由度があるのを見過ごしていたのである．

$$\psi_5 : \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t^5 - 1) \to \mathbf{Q}(\zeta)$$

において、$\psi_5(t) = \zeta$ と定義したが、$\psi_5(t) = \zeta^2$ としても本質は変わらないのである．$\sigma : \zeta \to \zeta^2$ は Galois 群 Gal $(\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q})$ に属する元で、一般の場合にもこの自由度を考慮すべきである．以後、この "隠れた" 自由度をいかに捕まえるか、あるいは回避するかに心を砕いていく．

2.2. Main Theorem 1

Reidemeister torsion の値が一致した 2 つの空間が本当に同相か？という所まではこの稿では扱わない．ひとまず値が同じかどうかに関心を向ける．

Definition 2.2. (Lens space type)
ζ を 1 の原始 p 乗根とする．このとき、$a \in \mathbf{Q}(\zeta)$ が *lens space type* であるとは、

$$a = \pm\zeta^m(\zeta^i - 1)^{-1}(\zeta^j - 1)^{-1} \qquad m, i, j \in \mathbf{Z}; (i, p) = 1,\ (j, p) = 1$$

の形に表されるときをいう．

M は orientable closed 3-manifold で、$H_1(M) \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ $(|p| \geq 2)$ であるとする．つまり、M は homology lens space であるとする．t を $H_1(M)$ の生成元、$d\ (\geq 2)$ を p の約数として、ξ_d を 1 の原始 d 乗根とする．$\psi_d : \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t^n - 1) \to \mathbf{Q}(\xi_d)$ を $\psi_d(t) = \xi_d$ で決まる環準同形とする．任意の d に対して $\tau^{\psi_d}(M)$ の値が lens space type のとき、M そのものが *lens space type* であると定義する．Theorem 1.34 より、通常の lens space は lens space type である．

Remark 2.3. あらゆる ψ_d を取ることによって、Reidemeister torsion の上ではできる限りのことをやっているのである．なぜなら、$\mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t^n - 1)$ からの任意の準同形 φ の像 Im (φ) となり得るものは、準同形定理により、$\mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t^n - 1)$ をある ideal で割ったものである．言いかえると、$\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ を、$(t^n - 1)$ を含む ideal で割ったものである．これは $t^n - 1$ の約元で生成される．さらに zero divisor を持たないようにするためには、既約元で生成されるべきである．すると必然的に Im $(\varphi) \cong \mathbf{Z}[\xi_d]$ になるのである．

Notation

$$\Delta_{r,s}(t) := \frac{(t^{rs} - 1)(t - 1)}{(t^r - 1)(t^s - 1)} \qquad ((r, s) = 1),$$

ここで (r, s) は r と s の最大公約数を表す．$(r, s) = 1$ は r と s が互いに素ということである．これは (r, s)-torus knot の Alexander polynomial と同じである．

Main Theorem 1 *Let $K_{r,s}$ $((r,s)=1)$ be a knot in a homology 3-sphere Σ with its Alexander polynomial $\Delta_{r,s}(t)$, and $M=\Sigma(K_{r,s};p/q)$ the result of p/q-surgery along $K_{r,s}$ where $|p|,|r|,|s|\geq 2$ and $q\neq 0$. Then M is of lens space type if and only if the following* (1) *and* (2) *hold.*

(1) $(p,r)=1$, *and* $(p,s)=1$, *and*

(2) $r\equiv\pm 1 \pmod p$ *or* $s\equiv\pm 1 \pmod p$ *or* $qrs\equiv\pm 1 \pmod p$.

この証明のための準備をする.

Theorem 2.4. (Franz [6]) *Let ζ be a primitive n-th root of unity, S the set of non-zero divisors in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Let $\{a_j\ (j\in S)\}$ be integers satisfying the following conditions:*

(1) $a_{-j}=a_j$, (2) $\displaystyle\sum_{j\in S}a_j=0$, (3) $\displaystyle\prod_{i\in S}(\zeta^i-1)^{a_i}=1$.

Then $a_j=0$ for all $j\in S$.

この定理の証明は L 関数の理論を用いる.

Definition 2.5. (Norm of an algebraic number)

$F/\mathbf{Q}$ を有限次 Galois 拡大とする. $\alpha\in F$ のこの拡大に関する *norm* $N_{F/\mathbf{Q}}(\alpha)$ は以下で定義される.

$$N_{F/\mathbf{Q}}(\alpha):=\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}\,(F/\mathbf{Q})}\sigma(\alpha).$$

要するに Galois 群でクルクル回してザッと掛けたものである. 同じ α の norm でも拡大が変われば値も変わることに注意. 例えば、

$$N_{\mathbf{Q}(\sqrt{2})/\mathbf{Q}}(\sqrt{2})=2,\quad N_{\mathbf{Q}(\sqrt{2}+i)/\mathbf{Q}}(\sqrt{2})=4$$

である. しかし、α の最小多項式の定数項のベキの ±1 倍であることには変わりがない. この他、norm に関して成り立つ基本的なことをまとめておく.

Notation 拡大 $F/\mathbf{Q}$ が明らかなときは、$N_{F/\mathbf{Q}}(\alpha)$ を単に $N(\alpha)$ と表す. 以降の話では F は円分体（cyclotomic field）であることが主である. 円分体とは $\mathbf{Q}(\zeta)$ (ζ は 1 のベキ根) のことである.

Proposition 2.6. *Let $F/\mathbf{Q}$ be a finite Galois extension, and α an element of F. We denote $N_{F/\mathbf{Q}}(\alpha)$ by $N(\alpha)$. Then*

(1) $N(\alpha)\in\mathbf{Q}$,

(2) *if α is an algebraic integer (i.e. its minimal polynomial is a monic polynomial over* $\mathbf{Z}$*), then* $N(\alpha) \in \mathbf{Z}$*,*

(3) *if α is an algebraic integer, then α^{-1} is also an algebraic integer if and only if* $N(\alpha) = \pm 1$.

Proof of Main Theorem 1

Case 1. $(p, r) = 1$ かつ $(p, s) = 1$ のとき

まず条件について確認しておく. 以下の ①, ② は同値である.

① $(p, r) = 1$ かつ $(p, s) = 1$,

② 任意の p の約数 d (≥ 2) に対して $(d, r) = 1$ かつ $(d, s) = 1$.

d (≥ 2) を p の約数として、ξ を 1 の原始 d 乗根とする.

$$\tau^{\psi_d}(M) = \mathit{\Delta}_{r,s}(\xi)(\xi - 1)^{-1}(\xi^{\bar{q}} - 1)^{-1} = (\xi^{rs} - 1)(\xi^{r} - 1)^{-1}(\xi^{s} - 1)^{-1}(\xi^{\bar{q}} - 1)^{-1}.$$

この値が $\pm\xi^m(\xi^i - 1)^{-1}(\xi^j - 1)^{-1}$ $((i, d) = 1,\ (j, d) = 1)$ となる必要十分条件を求める. つまり、

$$(\xi^{rs} - 1)(\xi^i - 1)(\xi^j - 1) = \pm\xi^m(\xi^r - 1)(\xi^s - 1)(\xi^{\bar{q}} - 1)$$

となる必要十分条件を求める. 両辺に複素共役をかけて整理すると、

$$\begin{aligned}&(\xi^{rs} - 1)(\xi^{-rs} - 1)(\xi^i - 1)(\xi^{-i} - 1)(\xi^j - 1)(\xi^{-j} - 1)\\ &= (\xi^r - 1)(\xi^{-r} - 1)(\xi^s - 1)(\xi^{-s} - 1)(\xi^{\bar{q}} - 1)(\xi^{-\bar{q}} - 1).\end{aligned}$$

Theorem 2.4 より、

$$\{rs, -rs, i, -i, j, -j \pmod d\} = \{r, -r, s, -s, \bar{q}, -\bar{q} \pmod d\}.$$

(i) $rs \equiv \pm s \pmod d$ または $rs \equiv \pm r \pmod d$ のとき

$r \equiv \pm 1 \pmod d$ または $s \equiv \pm 1 \pmod d$ と同値である.

(ii) $rs \equiv \pm\bar{q} \pmod d$ のとき

$qrs \equiv \pm 1 \pmod d$ と同値である.

$d = p$ のときに、$r \equiv \pm 1 \pmod d$ または $s \equiv \pm 1 \pmod d$ または $qrs \equiv \pm 1 \pmod d$ であれば、他の d (≥ 2) でも成り立つ.

ちなみに、(i) のとき、$\tau^{\psi_p}(M) = \tau^{\psi_p}(L(p, q))$, (ii) のとき、$\tau^{\psi_p}(M) = \tau^{\psi_p}(L(p, r\bar{s}))$.

Case 2. $(p,r)=d\geq 2$ のとき

この条件が成り立てば、$(d,s)=1$ であることを確認しておく.

$p=p'd, r=r'd$ とする. t を不定元とする.

$$\Delta_{r,s}(t)=\frac{(t^{rs}-1)(t-1)}{(t^r-1)(t^s-1)}=\frac{\dfrac{t^{rs}-1}{t^d-1}\cdot(t-1)}{\dfrac{t^r-1}{t^d-1}\cdot(t^s-1)}$$

$$=\frac{t^{(p's-1)d}+\cdots+t^d+1}{t^{(r'-1)d}+\cdots+t^d+1}\cdot\frac{t-1}{t^s-1}.$$

ξ を 1 の原始 d 乗根とする. このとき、

$$\tau^{\psi_d}(M)=s(\xi^s-1)^{-1}(\xi^{\bar{q}}-1)^{-1}.$$

これが $\pm\xi^m(\xi^i-1)^{-1}(\xi^j-1)^{-1}$ $((i,d)=1,\ (j,d)=1)$ になり得ないことを示す.

円分拡大 $\mathbf{Q}(\xi)/\mathbf{Q}$ の拡大次数は $\varphi(d)$ である. ($\varphi(n)$ は Euler 関数. 3.2 を参照のこと.) $N_{\mathbf{Q}(\xi)/\mathbf{Q}}(\alpha)$ を $N(\alpha)$ と表す.

$$N(s(\xi^s-1)^{-1}(\xi^{\bar{q}}-1)^{-1})=N(s)N(\xi^s-1)^{-1}N(\xi^{\bar{q}}-1)^{-1},$$

$$N(\pm\xi^m(\xi^i-1)^{-1}(\xi^j-1)^{-1})=N(\pm\xi^m)N(\xi^i-1)^{-1}N(\xi^j-1)^{-1}.$$

$$N(s)=s^{\varphi(d)}\ (|s|\geq 2),\ N(\pm\xi^m)=\pm 1,$$

$$N(\xi^s-1)=N(\xi^{\bar{q}}-1)=N(\xi^i-1)=N(\xi^j-1)\neq 0$$

より、両者は等しくなり得ない. よって、$\tau^{\psi_d}(M)$ になり得ない.

以上により、Case 2 は除かれて、Case 1 のみが残る. ∎

3. Rational surgery along a genus 1 knot

3.1. Goda-Teragaito's Theorem

Main Theorem 2 の動機となった定理を述べる. S^3 内の hyperbolic knot に沿う surgery を調べた結果の一部で、genus 1 knot から lens space を生じたならば、その knot は trefoil であるであることを述べたものである.

Theorem 3.1. (Goda-Teragaito [7]) *Let K be a genus 1 knot in S^3. If a rational surgery along K yields a lens space, then K is the trefoil.*

3.2. Cyclotomic polynomial

Main Theorem 2 の証明には、円分多項式にまつわる事実を使う. 証明は [29] などを参照されたい. 実は 4 章（今回は割愛する）で利用する結果も含んでいる. 念のために記しておく.

Definition 3.2. (Euler function)

$\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を $\varphi(n) := \left|(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{\times}\right| \ (n \geq 2),\ \varphi(1) = 1$

で定義したものを *Euler function* という.

Proposition 3.3. (1) *If* $(m, n) = 1$*, then* $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$*.*

(2) *Let* p *be a prime number, and* $r \geq 1$*.* $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1} = p^{r-1}(p-1)$*.*

(3) *Let* $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i}$ *be a prime factorization of* n*.* $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i - 1}(p_i - 1)$*.*

(4) *If* $n \geq 3$*, then* $\varphi(n)$ *is even.*

(5) $n = \sum_{d|n} \varphi(d) = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$*.*

Definition 3.4. (Möbius function)

$$\mu : \mathbf{N} \to \{-1, 0, 1\} \text{ を } \mu(n) := \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ (-1)^m & (n = p_1 \cdots p_m; \text{互いに異なる素数の積}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義したものを *Möbius function* という.

Proposition 3.5. (1) *If* $(m, n) = 1$*, then* $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$*.*

(2) $\varphi(n) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} \cdot \mu(d) = \sum_{d|n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right)$*.*

(3) *Let* ζ *be a primitive* n*-th root of unity.* $\sum_{i \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{\times}} \zeta^i = \mu(n)$*.*

Definition 3.6. (Cyclotomic polynomial)

ζ を 1 の原始 n 乗根とするとき、

$$\mathbf{\Phi}_n(x) := \prod_{i \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{\times}} (x - \zeta^i)$$

を *n-th cyclotomic polynomial* と定義する.

Proposition 3.7. (1) $\mathbf{\Phi}_1(x) = x - 1$.

(2) *$\mathbf{\Phi}_n(x)$ is an irreducible monic polynomial over $\mathbf{Z}$.*

(3) *The degree of $\mathbf{\Phi}_n(x)$ is $\varphi(n)$.*

(4) $x^{\varphi(n)}\mathbf{\Phi}_n(x^{-1}) = \mathbf{\Phi}_n(x) \quad (n \geq 2)$.

(5) *Let p be a prime number, and $r \geq 1$.*

$$\mathbf{\Phi}_{p^r}(x) = x^{p^{r-1}(p-1)} + x^{p^{r-1}(p-2)} + \cdots + x^{p^{r-1}} + 1.$$

(6) $x^n - 1 = \prod_{d|n} \mathbf{\Phi}_d(x)$.

(7) $\mathbf{\Phi}_n(1) = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ p & (n = p^r; p \text{ is a prime number}) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

(8) $\mathbf{\Phi}_n(x) = \prod_{d|n} (x^{\frac{n}{d}} - 1)^{\mu(d)}$.

(9) *Let $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i}$ be a prime factorization of n.*

$$\mathbf{\Phi}_n(x) = \mathbf{\Phi}_{p_1 \cdots p_m}(x^{p_1^{r_1-1} \cdots p_m^{rm-1}})$$

.

3.3. Main Theorem 2

次数 2 の Alexander polynomial を持つ knot に沿う surgery がいつ lens space type になり得ないかを述べたのが Main Theorem 2 である.

Notation $\Delta_n(t) := n(t-1)^2 + t = nt^2 - (2n-1)t + n \quad (n \neq 0)$.

Main Theorem 2 *Let K be a knot in a homology 3-sphere Σ with its Alexander polynomial $\Delta_K(t) = \Delta_n(t)$, and $M = \Sigma(K; p/q)$ the result of p/q-surgery along K where $|p| \geq 2$ and $q \neq 0$. Let d (≥ 2) be a divisor of p, ξ_d a primitive d-th root of unity, $\psi_d : \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t^p - 1) \to \mathbf{Q}(\xi_d)$ a homomorphism such that $\psi_d(t) = \xi_d$, and $\tau^{\psi_d}(M)$ the Reidemeister torsion associated to ψ_d. Then the following* (1) *and* (2) *hold.*

(1) *If $n \leq -1$, then $\tau^{\psi_p}(M)$ is not of lens space type.*

(2) *If $|n| \geq 2$ and d is a prime number, then $\tau^{\psi_d}(M)$ is not of lens space type.*

これにより以下が導かれる.

Corollary 3.8. *In the same assumption as Main Theorem 2, if M is of lens space type, then*

$$\Delta_K(t) = t^2 - t + 1 \quad (n = 1).$$

この結果は Theorem 3.1 の代数的な翻訳になっていて、さらに以下の Ozsváth-Szabó [17] の結果の一部の拡張になっている.

Theorem 3.9. (Ozsváth-Szabó [17]) *Let K be a knot in S^3, and $M = S^3(K;p)$ the result of p-surgery along K where p is an integer. If M is a lens space, then the Alexander polynomial of K is the following form*

$$\Delta_K(t) = (-1)^m + \sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}(t^{s_j} + t^{-s_j}),$$

where $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m$.

つまり、次数 2 の場合に限ると、S^3 を homology 3-sphere Σ に、整数 surgery を有理数 surgery に拡張している.

Main Theorem 1 の Case 2 の証明 (p34) を観察すると、$\tau^{\psi_d}(M)$ の norm が lens space type な数の norm と一致するための条件がわかる.

Lemma 3.10. *Let K be a knot in a homology 3-sphere Σ with its Alexander polynomial $\Delta_K(t)$, and $M = \Sigma(K;p/q)$ the result of p/q-surgery along K where $|p| \geq 2$ and $q \neq 0$. If M is of lens space type, then*

$$N_{\mathbf{Q}(\xi_d)/\mathrm{Q}}(\Delta_K(\xi_d)) = \pm 1 \quad (d|p,\ d \geq 2).$$

$\Delta_K(\xi_d)$ が代数的整数環 $\mathbf{Z}[\xi_d]$ の中で unit (Proposition 2.6 (3)) であることを言っている. 実は $\Delta_K(t)$ が $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}_n]$ の中で unit であることまで言える.

Definition 3.11. (Norm polynomial)
ζ を 1 の原始 p 乗根とするとき、

$$f_p(n) := N_{\mathbf{Q}(\zeta)/\mathrm{Q}}(\Delta_n(\zeta))$$

を *norm polynomial* と定義する. これは n についての $\mathbf{Z}$ 係数の多項式となる.
$\Delta_n(t) = 0$ の根を α_1, α_2 とする. このとき以下の変形が重要である.

$$f_p(n) = \prod_{i \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times} n(\zeta^i - \alpha_1)(\zeta^i - \alpha_2) = n^{\varphi(p)}\mathbf{\Phi}_p(\alpha_1)\mathbf{\Phi}_p(\alpha_2).$$

Main Theorem 2 よりも強い主張である以下を示す.

Theorem 3.12. (1) *If* $n \leq -1$*, then* $f_p(n) \neq \pm 1$.

(2) *If* $|n| \geq 2$ *and* p *is a prime number, then* $f_p(n) \neq \pm 1$.

特に $p = 2$ のとき、$f_2(n) = \Delta_n(-1) = 4n - 1$ より、$n \neq 0$ で $f_2(n) \neq \pm 1$ となる. 以下、$p \geq 3$ を仮定する.

Proposition 3.13. *The degree of* $f_p(n)$ *is* $\varphi(p)$.

Proof $\Delta_n(\zeta^i) = (1-\zeta^i)^2 n + \zeta^i \quad (i \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times)$ は n の 1 次式である. ∎

Lemma 3.14. *If* $p \geq 3$*, then there exists a polynomial* $g_p(n)$ *of* n *over* $\mathbf{Z}$ *such that* $f_p(n) = \{g_p(n)\}^2$.

Proof $\Delta_n(\zeta) = \zeta^2 \Delta_n(\zeta^{-1})$.

$$\delta(\zeta) := \frac{\Delta_n(\zeta)}{\zeta} = \frac{\Delta_n(\zeta^{-1})}{\zeta^{-1}}$$

とおく. このとき、$\delta(\zeta) \in \mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ である.

$\zeta \neq \zeta^{-1}$ より、$[\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1})] = 2$ なので、$[\mathbf{Q}(\zeta+\zeta^{-1}) : \mathbf{Q}] = \varphi(p)/2$.

$$g_p(n) := N_{\mathbf{Q}(\zeta+\zeta^{-1})/\mathbf{Q}}(\delta(\zeta))$$

とすればよい. ∎

$f_p(n),\ g_p(n)$ を以下のように展開しておく.

$$f_p(n) = \sum_{i=0}^{\varphi(p)} a_i n^i, \qquad g_p(n) = \sum_{j=0}^{\varphi(p)/2} b_j n^j.$$

Lemma 3.15. $a_{\varphi(p)} = \{\mathbf{\Phi}_p(1)\}^2$ *and* $a_0 = 1$.

Proof $a_{\varphi(p)} = N_{\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}}((1-\zeta)^2) = \{\mathbf{\Phi}_p(1)\}^2,\ a_0 = N_{\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}}(\zeta) = 1$. ∎

Lemma 3.16. $f_p(n)$ *and* $g_p(n)$ *are alternating polynomials.*

Proof

$$\delta(\zeta) = \frac{\Delta_n(\zeta)}{\zeta} = 1 - 2\{1 - \cos(2\pi k/p)\}n.$$

ここで、$(k,p) = 1$ なので、これらの積は alternating. ∎

Proof of Theorem 3.12. (1) $n \leq -1$ のとき、$f_p(n) \geq a_{\varphi(p)} + a_0 \geq 1+1 = 2$ より、$f_p(n) \neq \pm 1$. ∎

Corollary 3.17. *We can take* $b_{\varphi(p)/2} = \mathbf{\Phi}_p(1)$ *and* $b_0 = (-1)^{\varphi(p)/2}$.

Proof Lemma 3.15, Lemma 3.16 より得られる. ∎

Lemma 3.18. $a_1 = 2\mu(p) - 2\varphi(p)$. *In particular, if* p *is an odd prime number, then* $a_1 = -2p$ *and* $b_1 = (-1)^{\varphi(p)/2-1}p$.

Proof $a_1 = \displaystyle\sum_{i\in(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times}(1-\zeta^i)^2\frac{N_{\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}}(\zeta)}{\zeta^i} = \sum_{i\in(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times}(\zeta^i+\zeta^{-i}-2)$

$= 2\displaystyle\sum_{i\in(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times}\zeta^i - 2\varphi(p)$.

Proposition 3.5. (3) より、$a_1 = 2\mu(p) - 2\varphi(p)$.

特に p が奇素数のとき、$a_1 = 2 - 2(p-1) = -2p$.

$$(\cdots + b_1 n + b_0)^2 = \cdots + 2b_0 b_1 n + b_0^2$$

より、$b_1 = (-1)^{\varphi(p)/2-1}p$. ∎

Lemma 3.19. *If* p *is a prime number, then* $f_p(n) = n^p(\alpha_1^p - 1)(\alpha_2^p - 1)$.

Proof $\dfrac{n^p(\alpha_1^p-1)(\alpha_2^p-1)}{f_p(n)} = n(\alpha_1-1)(\alpha_2-1) = \mathit{\Delta}_n(1) = 1$. ∎

Lemma 3.20. *If* p *is an odd prime number, then*

$$b_j \equiv 0 \pmod{p} \quad (j = 1, \cdots, \varphi(p)/2).$$

Proof $f_p(n) = n^p(\alpha_1^p-1)(\alpha_2^p-1) \equiv n^p(\alpha_1-1)^p(\alpha_2-1)^p$
$= \{n(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)\}^p = 1^p = 1 \pmod{(p)}$.

ここで (p) は、p で生成される n の多項式環 $\mathbf{Z}[n]$ の ideal.

$\mathbf{Z}[n]/(p) \cong (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[n]$ は UFD なので、$f_p(n) = \{g_p(n)\}^2 \equiv 1 \pmod{(p)}$ から $g_p(n) \equiv \pm 1 \pmod{(p)}$ となる. これは、

$$b_j \equiv 0 \pmod{p} \quad (j = 1, \cdots, \varphi(p)/2)$$

を意味する. ∎

Proof of Theorem 3.12. (2) $p = 2$ の場合は終わっているので、p は奇素数とする. Lemma 3.20 より、$\mathbf{Z}$ 上の多項式 $h_p(n)$ が存在して、

$$g_p(n) = pn \cdot h_p(n) + b_0.$$

$p \geq 3$ より、$f_p(n) = \pm 1$ と $h_p(n) = 0$ は同値.

$$h_p(n) = \sum_{k=0}^{N} c_k n^k$$

とするとき、Corollary 3.17, Lemma 3.18 より、$c_N = 1, c_0 = \pm 1$. これより、$h_p(n) = 0$ ならば、$n = \pm 1$. （高校数学！）よって $|n| \geq 2$ のとき、$h_p(n) \neq 0$. つまり、$f_p(n) \neq \pm 1$. ∎

例えば、$h_3(n) = 1$, $h_5(n) = n - 1$, $h_7(n) = (n-1)^2$, $h_{11}(n) = (n-1)(n^3 - 4n^2 + 3n - 1)$.

Corollary 3.21. *Let K be a knot in a homology 3-sphere Σ with its Alexander polynomial $\Delta_K(t)$, and $M = \Sigma(K; p/q)$ the result of p/q-surgery along K where $|p| \geq 2$ and $q \neq 0$. If $\Delta_K(t)$ can be divided by $\Delta_n(t)$ $(n \neq 0, 1)$, then M is not of lens space type.*

Proof $N(\Delta_K(\zeta))$ は $N(\Delta_n(\zeta))$ で割り切れて、$N(\Delta_n(\zeta)) \neq \pm 1$ である. ∎

Question 3.22. *If $\Sigma(K; p/q)$ is of lens space type, then is $\Delta_K(t)$ a product of cyclotomic polynomials ?*

せっかく Question にしておきながら恐縮だが、これには反例がある. K を $(-2, 3, 7)$-pretzel knot とする (Figure 10). Fintushel-Stern[4] により、K に沿う 18-, 19-surgery が lens space になることが知られている. ところが、

$$\Delta_K(t) = t^{10} - t^9 + t^7 - t^6 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1$$

は $\mathbf{Z}$ 上 irreducible だが、1 のベキ根を解に持たないので反例である (cf. [9]).

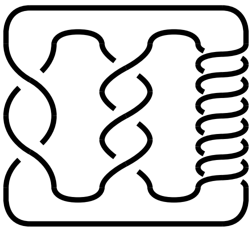

Figure 10: $(-2, 3, 7)$-pretzel knot

4. Generalizations and Applications

この章は割愛させていただきます. すいません.

References

[1] E. J. Brody, *The topological classification of lens spaces,* Ann. of Math. (2), **71** (1960), 163–184.

[2] T. A. Chapman, *Topological invariance of Whitehead torsion,* Amer. J. Math., **96** (1974), 488–497.

[3] M. M. Cohen, *A Course in Simple-Homotopy Theory,* Springer-Verlag (1972).

[4] R. Fintushel and R. J. Stern, *Constructing lens spaces by surgery on knots,* Math. Z., **175** (1) (1980), 33–51.

[5] R. H. Fox, *Free differential calculus III,* Ann. of Math. (2), **64** (1956), 407–419.

[6] W. Franz, *Über die Torsion einer Überdeckung,* J. Reine Angew. Math., **173** (1935), 245–254.

[7] H. Goda and M. Teragaito, *Dehn surgeries on knots which yield lens spaces and genera of knots,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **129**, No.3 (2000), 501–515.

[8] C. McA. Gordon, *Dehn surgery and satellite knots,* Trans. Amer. Math. Soc., **275**, No.2 (1983), 687–708.

[9] E. Hironaka, *The Lehmer polynomial and pretzel links,* Canad. Math. Bull., **44** (4) (2001), 440–451.

[10] T. Kadokami, *Reidemeister torsion and lens surgeries on knots in homology 3-spheres,* preprint.

[11] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth and Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries,* math.GT/0310164, (2003), 1–76.

[12] T. Mattman, *Cyclic and finite surgeries on pretzel knots,* math.GT/0102050, (2001), 1–11.

[13] J. P. Mayberry and K. Murasugi, *Torsion-groups of abelian coverings of links,* Trans. Amer. Math. Soc., **271**, No.1 (1982), 143–173.

[14] J. W. Milnor, *A duality theorem for Reidemeister torsion,* Ann. of Math. (2), **76** (1962), 137–147.

[15] ______, *Whitehead torsion,* Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), 358–426.

[16] L. Moser, *Elementary surgery along a torus knot,* Pacific J. Math., **38** (1971), 737–745.

[17] P. Ozsváth and Z. Szabó, *On knot Floer homology and lens space surgeries,* math.GT/0303017, (2003), 1–23.

[18] J. Porti, *Mayberry-Murasugi's formula for links in homology 3-spheres,* math.GT/036181.

[19] J. H. Przytycki and A. Yasuhara, *Symmetry of links and classification of lens spaces,* (2000).

[20] K. Reidemeister, *Homotopieringe und Linsenräume,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **11** (1935), 102–109.

[21] D. Rolfsen, *Knots and links,* Publish or Perish, Inc. (1976).

[22] T. Sakai, *Reidemeister torsion of a homology lens space,* Kobe J. Math., **1** (1984), 47–50.

[23] M. Shimozawa, *Dehn surgery on torus knots,* Master Thesis (in Japanese), Osaka City University (2004).

[24] V. G. Turaev, *Reidemeister torsion and the Alexander polynomial,* Math. USSR-Sbornik, **30** (1976), 221–237.

[25] ______, *Reidemeister torsion in knot theory,* Russian Math. Surveys, **41-1** (1986), 119–182.

[26] ______, *Introduction to Combinatorial Torsions,* Birkhäuser Verlag (2001).

[27] ______, *The Alexander polynomials and Torsions of 3-manifolds,* Lecture at RIMS, (2000).

[28] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups,* Topology, **33**, No.2 (1994), 241–256.

[29] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields,* Graduate Texists in Mathematics **83**, Springer-Verlag, (1982).

[30] J. H. C. Whitehead, *Simple homotopy types,* Amer. J. Math, **72**, (1950), 1–57.