

理想四面体分割された双曲多様体の双曲デーン手術

秋吉宏尚 (大阪大学大学院理学研究科)

2003年5月10日の大阪産業大学での勉強会用

2003年5月23日版 (まだ未完成)

1 序

3次元の向き付け可能な有限体積完備双曲多様体は、境界の各成分がトーラスであるようなコンパクト多様体の内部に同相であることが知られている。このノートでは、スペースの節約のため、「カスプつき双曲多様体」とは「3次元の向き付け可能な非コンパクト有限体積完備双曲多様体」であると約束する。すると、カスプつき双曲多様体は、境界が空でなく各成分がトーラスであるようなコンパクト3次元多様体の内部と同相であることになる。

互いに素な整数の組の全体を P 、また、 $\hat{P} = P \cup \{\infty\}$ と書くことにする。このとき、 \hat{P} を自然に平面 \mathbb{R}^2 の一点コンパクト化 $\widehat{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ の部分集合とみなすことが出来る。トーラスと同相な境界成分 T_1, \dots, T_k を持つ3次元多様体 M に対し、 T_1, \dots, T_k の基本群の生成系の代表元の組 $\{\mu_1, \lambda_1\}, \dots, \{\mu_k, \lambda_k\}$ を固定すると、 \hat{P}^k の元 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$ に対し、以下の操作を施すことにより新しい多様体 $M(\mathbf{s})$ を作ることが出来る。

- s_j が $(P_j, q_j) \in P$ のとき、境界成分 T_j にメリディアンが $p_j\mu_j + q_j\lambda_j$ を表す単純閉曲線と同一視されるようにソリッドトーラスを (境界に沿って) 貼り付ける。
- s_j が ∞ のときは境界成分 T_j をそのまま残す。

$M(\mathbf{s})$ を、 M に \mathbf{s} -Dehn filling を施して得られる多様体という。

このノートでは、Thurston による次の定理の幾何的側面を、双曲的理想四面体分割を通して解説する (予定)。(ただし、双曲構造の微小変形が可能であることの証明はここでは行わない。)

定理 1.1. k 個のエンド (カスプ) を持つカスプつき双曲多様体 M に対し、 (∞, \dots, ∞) の $(\widehat{\mathbb{R}^2})^k$ における近傍 U で以下の性質を満たすものが存在する。任意の $\mathbf{s} \in U \cap \hat{P}^k$ に対し、 $M(\mathbf{s})$ もまた有限体積完備双曲構造を許容する。

補足 1.2. 上の定理は、本質的には四面体分割を用いない形で [6] により証明されている。一方、[6] で8の字結び目補空間に対して行われた考察が [4] で一般化され、双曲的理想四面体分割を持つ多様体に対し、上の定理の別証明が与えられている。[1] は完備双曲構造から離れたところでも同様の主張が成り立つことを証明したきれいな論文である。こうした手法は [5] によりさらに平らな四面体が存在しても適用できるという形に一般化されている。上と同様の定理は無限体積多様体でも知られている (例えば [3])。また、多様体に依存しない U の評価も [2] により与えられている。

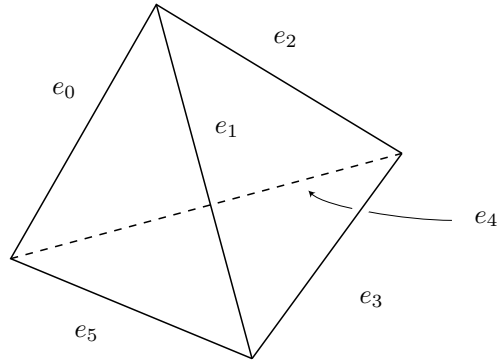


図 1: 理想四面体

2 理想四面体

\mathbb{H}^3 の無限遠球面 $\partial\mathbb{H}^3$ 上の 4 点の閉凸包であるような集合で内点を含むものを**理想四面体**と呼ぶことにする. このとき, $\partial\mathbb{H}^3$ 上の 4 点をこの理想四面体の**頂点**と呼ぶ. 向き付けられた理想四面体 σ の辺 τ を固定する. このとき, τ の端点を v_0, v_1 と名づけ, $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ が σ の向きを表すように残りの頂点に v_2, v_3 と名づけることにする. すると, $PSL_2(\mathbb{C})$ の元を作用させることで, v_0, v_1, v_2 をそれぞれ $\infty, 0, 1$ にうつすことが出来る. このとき, v_3 のうつる先を (一時的に) $z(v_0, v_1, v_2, v_3)$ と書くことにする. すると,

$$z(v_0, v_1, v_2, v_3) = \frac{v_2 - v_0}{v_2 - v_1} \frac{v_3 - v_1}{v_3 - v_0}$$

と書けるので,

$$\mu(v_1, v_0, v_3, v_2) = z(v_0, v_1, v_2, v_3)$$

であることは容易にわかる. すなわち, μ は辺の端点の順序付けのしかたに依存しないことがわかった.

定義 2.1. 上のようにして定義された $z(v_0, v_1, v_2, v_3)$ を, (辺を指定した) 理想四面体の**モジュラス**と呼び, $\mu(\sigma, \tau)$ と書く.

上で得られた具体的記述を使えば, 次の命題はすぐに証明できる.

命題 2.2. 理想四面体 σ の辺を, 図 1 に描かれているように名づけることにする. このとき, 以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mu(\sigma, e_0) &= \mu(\sigma, e_3), & \mu(\sigma, e_1) &= \mu(\sigma, e_4), & \mu(\sigma, e_2) &= \mu(\sigma, e_5) \\ \mu(\sigma, e_1) &= \frac{1}{1 - \mu(\sigma, e_0)}, & \mu(\sigma, e_2) &= 1 - \frac{1}{\mu(\sigma, e_0)} \\ \mu(\sigma, e_0)\mu(\sigma, e_1)\mu(\sigma, e_2) &= -1 \end{aligned}$$

3 理想四面体分割から双曲構造

この節では, 多様体の位相的な理想四面体分割が与えられたときに, 双曲構造が定まる条件について述べる.

境界の各成分がトーラスであるような多様体 M に対し、その位相的な理想四面体分割が一つ与えられているとする：

$$M = \bigcup_{j=1}^n \sigma_j \quad (\text{各 } \sigma_j \text{ は理想四面体})$$

各 σ_j に双曲構造を入れ、それが M の双曲構造を定める条件を考えたい。ここで、各 σ_j は M と同じ向きが入っていて、これから考える σ_j の双曲構造も、 \mathbb{H}^3 の向きとあうように、 $\Im(\mu(\sigma_j, e)) > 0$ となるものだけを考える。このとき、次の命題が成り立つ。

命題 3.1. 各 σ_j を双曲的理想四面体とみなすとき、それが M の（完備とは限らない）双曲構造を定めるための必要十分条件は、理想四面体分割から定まる M 内の任意の辺 τ に対し、次の条件が成り立つことである： τ を含む理想四面体を $\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_k}$ 、その同一視されて τ となる辺を e_{j_1}, \dots, e_{j_k} とする。ただし、ある四面体 σ の異なる辺 e, e' が同一視されて τ となっているならば、二つの組 (σ, e) と (σ, e') は上の列の中では別のものとして扱うことにする。このとき、

$$\mu(\sigma_{j_1}, e_{j_1})\mu(\sigma_{j_2}, e_{j_2}) \cdots \mu(\sigma_{j_k}, e_{j_k}) = 1$$

が成立する。

証明の詳細は述べないが、まず、オイラー数の計算から、命題の条件式は、

$$\log \mu(\sigma_{j_1}, e_{j_1}) + \log \mu(\sigma_{j_2}, e_{j_2}) + \cdots + \log \mu(\sigma_{j_k}, e_{j_k}) = 2\pi i$$

と書けることと同値であることがわかる。ただし、 $\Im \log \in (0, \pi)$ となるように分枝をとる。このことを踏まえると、上半空間 \mathbb{H}^3 で τ を ∞ と 0 を結ぶ測地線とし、 (σ_{j_1}, e_{j_1}) の 3 番目の頂点を 1 とするとき、上の式は、 (σ_{j_1}, e_{j_1}) の隣に (σ_{j_2}, e_{j_2}) を配置し、その隣に (σ_{j_3}, e_{j_3}) を配置し、 \cdots とするとき、 (σ_{j_k}, e_{j_k}) のちょうど隣にはスタート地点の (σ_{j_1}, e_{j_1}) が配置されている、という状態を式で表したものである。

ここで、前節で述べたことを思い出すと、各四面体 σ_j にあらかじめ辺 e_j を固定し、 $z_j = \mu(\sigma_j, e_j)$ と置いておくと、各辺で一つずつ z_1, \dots, z_n に関する代数方程式が得られることがわかる。オイラー数の計算をすると、 M 内の辺の数は四面体の数と同じ n であることもわかるので、結局、 n 変数の代数方程式が全部で n 個得られる。この節のはじめで述べたように、向きづけの制約から $\Im(z_j) > 0$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) であるようにしていたことにも注意して、次の定義をする。

定義 3.2. M の理想四面体分割から定まる双曲構造の空間を

$$\mathcal{D} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \mu(\sigma_{j_1}, e_{j_1})\mu(\sigma_{j_2}, e_{j_2}) \cdots \mu(\sigma_{j_k}, e_{j_k}) = 1, \mu(z_j) > 0\}$$

と定義する。

Mostow 剛性より、完備双曲構造に対応する点は存在しても高々 1 点である。

4 完備性

この節では、 M のエンド一つに着目して、理想四面体分割から与えられた双曲構造の下でそのエンドが完備かどうかを考える。

4.1 エンドのトーラスの $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -構造

M のエンドは $T^2 \times (0, \infty)$ と同相であるが、理想四面体分割を用いることで次が得られる。

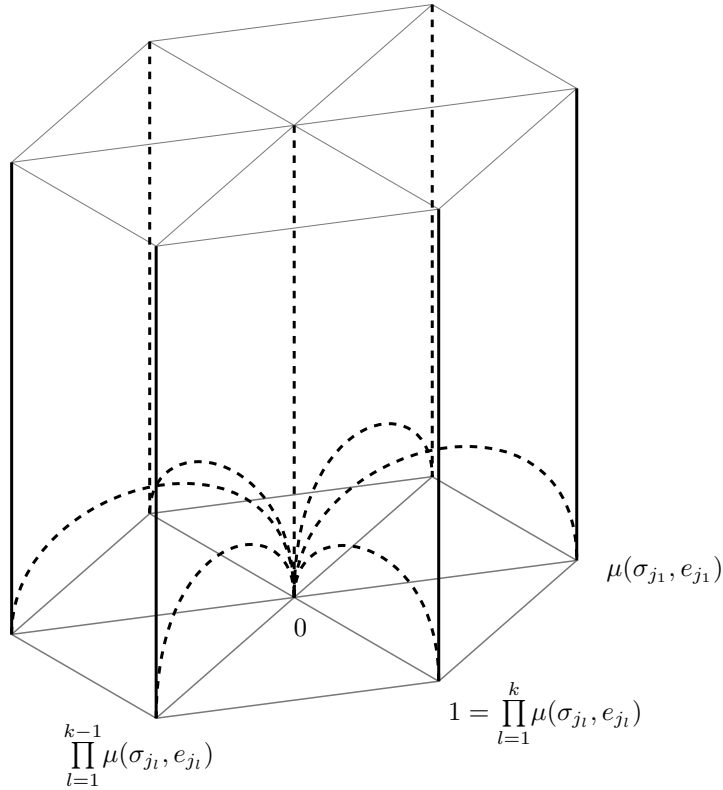


図 2: 辺のまわりの貼り合わせ

命題 4.1. 各レベルのトーラス $T^2 = T^2 \times \{t\}$ ($t \in (0, \infty)$) には理想四面体分割から自然に三角形分割が誘導される. さらに, この三角形分割から, T^2 上の $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -構造が定義される.

Proof. エンド $T^2 \times (0, \infty)$ は, 頂点の近傍を貼り合わせて得られると思ってよい. 従って, その貼り合わせを各レベルのトーラス $T^2 = T^2 \times \{t\}$ に制限すれば三角形分割が誘導される. T^2 上の $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -構造を定義するには, このエンドを構成する四面体の頂点が ∞ にくるように, 上半空間 \mathbb{H}^3 の中で四面体たちのコピーを次々と貼り合わせていけばよい. (図2のような状況を想像してください.) このとき, 各四面体を平面 $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ に射影すると三角形ができるが, そうした三角形は $\text{Sim}^+(\mathbb{C}) = \text{Stab}(\infty, \text{PSL}_2(\mathbb{C}))$ の作用で移りあうものを同一視すれば, 四面体とその頂点の組から一意的に定まる. さらに, 四面体の面の貼り合わせから誘導される射影した三角形の辺の貼り合わせ写像は $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ に含まれる. 理想四面体の双曲構造から M の双曲構造が誘導されているときには, 前節で見たように, 辺の周りでの貼り合わせがうまくいっていて, それを射影したときには, 三角形分割の頂点の周りで貼り合わせ写像がうまくいっていることがわかる. \square

補足 4.2. $\text{Sim}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}, b \in \mathbb{C}\}$ と書ける. $\varphi = (z \mapsto az + b) \in \text{Sim}(\mathbb{C})$ に対し, $d\varphi = a$ と書くことにする.

4.2 準同型 $\pi_1(T^2) \rightarrow \text{Sim}^+(\mathbb{C})$

エンドの各レベルのトーラス T^2 に自然に (一意的な) $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -構造が入ったので, 次はそのホロノミーを考えてみる. $\pi_1(T^2)$ の表示

$$\pi_1(T^2) = \langle x, y \mid xy = yx \rangle$$

を固定して考える．準同型 $\phi: \pi_1(T^2) \rightarrow \text{Sim}^+(\mathbb{C})$ に対して， $\phi(x) = (z \mapsto az + b)$ ， $\phi(y) = (z \mapsto cz + d)$ とする．このとき， $\phi(xy)z = a(cz + d) + b$ ， $\phi(yx)z = c(az + b) + d$ なので，

$$d(a-1) = b(c-1)$$

である．

Case 1: $a \neq 1$ のとき．

$\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ による共役をとることで， $b = 0$ と仮定してよい．よって， $a = 1$ または $d = 0$ ．これは， $\phi(x) = \text{id}$ または $\text{Fix}(\phi(x)) = \text{Fix}(\phi(y))$ （または $\phi(y) = \text{id}$ ）であることと同値である．

Case 2: $a = 1$ のとき．

このとき， $b = 0$ または $c = 1$ である．このことは， $\phi(x) = \text{id}$ または「 $\phi(x)$ も $\phi(y)$ も平行移動である」（または $\phi(y) = \text{id}$ ）ということと同値である．

従って，次が成り立つ．

命題 4.3. 準同型 $\phi: \pi_1(T^2) \rightarrow \text{Sim}^+(\mathbb{C})$ ， $\phi(x) = (z \mapsto az + b)$ ， $\phi(y) = (z \mapsto cz + d)$ に対して，次のいずれかが成り立つ．

1. $\phi(x) = \text{id}$ または $\phi(y) = \text{id}$
2. $a \neq 1$ ， $c \neq 1$ かつ $\text{Fix}(\phi(x)) = \text{Fix}(\phi(y))$
3. $a = c = 1$ かつ $b \neq 0$ ， $d \neq 0$

4.3 トーラスの $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -構造のホロノミー

今度は，トーラスに $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -構造が与えられているとして， $\phi: \pi_1(T^2) \rightarrow \text{Sim}^+(\mathbb{C})$ をそのホロノミーとする．上の命題とは異なるが，次の場合わけを行う．（ $\varphi = (z \mapsto az + b) \in \text{Sim}(\mathbb{C})$ に対し， $d\varphi = a$ と書くことにしていたことに注意．）

1. $d\phi(x) = d\phi(y) = 1$
2. $d\phi(x) \neq 1$ または $d\phi(y) \neq 1$

トーラスの $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -構造が基本領域をホロノミーで貼り合わせて得られると考える．

Case 1: 貼り合わせ写像は \mathbb{R}^2 のユークリッド構造に関して等長的である．従って，トーラスに定義されていた $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -構造は，実はユークリッド構造であったことがわかる．トーラスは閉曲面なので，特に完備である．よって， $\phi(x)$ ， $\phi(y)$ は線形独立な平行移動でなければならない．そして， $T^2 = \mathbb{R}^2 / \langle \phi(x), \phi(y) \rangle$ となる．

さらにこの場合，頂点の近傍を貼り合わせてエンドの $T^2 \times (0, \infty)$ が得られることを思い出すと，貼り合わせ写像が平行移動（これは， $PSL_2(\mathbb{C})$ の元と見ると ∞ を固定する放物的元）なので，できあがり完備であることもわかる．

Case 2: この場合は，命題 4.3 の 1 か 2 に該当するわけだが， $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ の元で共役をとることで， $\phi(x) = (z \mapsto az)$ ， $\phi(y) = (z \mapsto cz)$ と仮定できる．トーラスの $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -座標近傍系 $\{\varphi_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}\}_{j=1}^n$ を考え， $X = \cup_{j=1}^n \varphi_j^{-1}(0)$ とすると， $\{\varphi'_j: U_j \cap X^c \rightarrow \mathbb{C}^\times\}_{j=1}^n$ は $T^2 - X$ に， $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}^\times), \mathbb{C}^\times) = (\mathbb{C}^\times, \mathbb{C}^\times)$ -構造を定める．よって， $\{\log \circ \varphi'_j: U_j \cap X^c \rightarrow \mathbb{C}\}_{j=1}^n$ によって， $T^2 - X$ に， $(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = (\text{Isom}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -構造（すなわちユークリッド幾何構造）が定まる．さらに， $T^2 - X$ の X の近傍は無限に長いユークリッド的アニュラスに等

命題 4.4. 考えているエンドが完備であるための必要十分条件は, $\log \circ d\phi(\alpha) = 0$ となることである.

Proof. 次の事実を確かめれば十分である.

1. $d\phi(x) = d\phi(y) = 1$ ならば, $\log \circ d\phi(\alpha) = 0$
2. $d\phi(x) \neq 1$ または $d\phi(y) \neq 1$ ならば, $\log \circ d\phi(\alpha) \neq 0$

Case 1: $d\phi(x) = d\phi(y) = 1$ ならば, $\phi(\alpha)$ は平行移動であることがわかる. 従って, $\Re(\log \circ d\phi(\alpha)) = 0$ である. ここで, $(\tilde{\alpha}$ を適当に動かして滑らかにしておけば) $\Im(\log \circ d\phi(\alpha))$ は曲線 $\tilde{\alpha}$ の基本領域上でのガウス写像 (つまり単位法ベクトルの積分) であることがわかるので, $\tilde{\alpha}$ が自己交差を持たないことから $\Im(\log \circ d\phi(\alpha)) = 0$ でないといけないことがわかる. よって, $\log \circ d\phi(\alpha) = 0$ である.

Case 2: $d\phi(x) \neq 1$ または $d\phi(y) \neq 1$ ならば, $\log \circ d\phi(\alpha)$ は, トーラスに $\log \circ \varphi_j$ で定まる完備ユークリッド構造のホロノミーによる α の像に一致する. よって, $\log \circ d\phi(\alpha) \neq 0$ である. \square

5 双曲デーモン手術

双曲的理想四面体分割から多様体 M の双曲構造を定義するとき, 各エンドのレベルトーラス T^2 には自然に $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -構造が定義され, $\pi_1(T^2) = \langle x, y \mid xy = yx \rangle$ とするとき, ホロノミー $\phi: \pi_1(T^2) \rightarrow \text{Sim}^+(\mathbb{C})$ に対し, 自然に $\log \circ d\phi(x) \in \mathbb{C}, \log \circ d\phi(y) \in \mathbb{C}$ が定義された. $\log \circ d\phi(x) = 0$ ($\Leftrightarrow \log \circ d\phi(y) = 0$) ならばそのエンドは完備であった. 一方, 完備でないときは $\log \circ d\phi(x), \log \circ d\phi(y)$ は \mathbb{R} 上線形独立であった. このエンドに対する一般化されたデーモン手術係数 (generalized Dehn surgery coefficients) $(p, q) \in \widehat{\mathbb{R}^2}$ を次のように定義する.

定義 5.1. 考えているエンドが完備なとき, $(p, q) = \infty$ と定義する. また, 完備でないとき, (p, q) を,

$$p(\log \circ d\phi(x)) + q(\log \circ d\phi(y)) = 2\pi i$$

を満たす実数の組と定義する.

命題 5.2. 一般化されたデーモン手術係数が $(p, q) \in P$ であるようなエンドに対し, その完備化はメリディアンが $px + qy \in \pi_1(T^2)$ であるようなソリッドトーラスの双曲構造を与える.

命題 5.3 (Neumann-Zagier [4]). k 個のエンド (カスプ) を持つカスプつき双曲多様体 M に対し, M の完備双曲構造を与える双曲理想四面体分割が存在すると仮定する. このとき, (∞, \dots, ∞) の $(\widehat{\mathbb{R}^2})^k$ における近傍 U で以下の性質を満たすものが存在する. 任意の $(s_1, \dots, s_k) \in U \cap \widehat{P}^k$ に対し, 双曲理想四面体分割から定まる M のある双曲構造で, 各エンド j の一般化されたデーモン手術係数が s_j に一致するものが存在する.

補足 5.4. M の完備双曲構造を与える双曲理想四面体分割の存在を仮定しなくても, 完備双曲構造の近傍では, 一般化されたデーモン手術係数は定義され, その実現可能性が Thurston [6] により示されている. 双曲デーモン手術に関する様々な論文では, 一般化されたデーモン手術係数の実現可能性, すなわち命題 5.3 に対応する主張, をいかに証明するかという工夫がなされている.

二つの命題 5.2, 5.3 を仮定すれば, 完備双曲多様体が双曲理想四面体分割を持つ場合に定理 1.1 がすぐに得られる. 今回の勉強会では, 命題 5.2 の証明まで終わった.

参考文献

- [1] Y. E. Choi, *Positively oriented ideal triangulations on hyperbolic three-manifolds*, preprint.
- [2] C. D. Hodgson and S. P. Kerckhoff, *Universal bounds for hyperbolic Dehn surgery*, preprint.
- [3] M. Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Progress in Mathematics, **183**, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
- [4] W. D. Neumann and D. Zagier, *Volumes of hyperbolic three-manifolds*, *Topology* **24** (1985), no. 3, 307–332.
- [5] C. Petronio and J. Porti, *Negatively oriented ideal triangulations and a proof of Thurston's hyperbolic Dehn filling theorem*, *Expo. Math.* **18** (2000), no. 1, 1–35.
- [6] W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Electronic version 1.0 - October 1997, available from <http://www.msri.org/gt3m/>.