

組みひもの理論と力学系

金 英子 (京都大学 PD)

関西低次元トポロジー若手勉強会

2003年3月10日

概要

二次元円板 \mathbb{D} 上の homeo. から定まる力学系について、ある周期軌道の様子から、組みひもの理論を用いると、他の周期軌道の存在性や位相的エントロピーの下からの評価が得られることを解説する。

参考文献として、[4, 18] をあげておく。関連する話題として、Nielsen 不動点理論 (Jiang、松岡 etc) や homoclinic tangle 理論 (Collins) があるが、いつかまた若手勉強会で話ができるようにがんばります。

1 力学系

以下、 T で、 \mathbb{R} 、 \mathbb{Z} 、 $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ 、または、 $\mathbb{Z}^+ := \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+$ を表す。

定義 1. X を集合とし、 $\phi: X \times T \rightarrow X$ を写像とする。

$$(i) \phi(x, 0) = x$$

$$(ii) \phi(x, s+t) = \phi(\phi(x, s), t) \text{ for } \forall s, \forall t \in T$$

が、任意の $x \in X$ について成り立つとき、 ϕ を力学系という。

記号 1. $\phi(x, t)$ を、 $\phi^t(x)$ と表すことにする。このとき、定義 1. の条件 (i) $\Leftrightarrow \phi^0 = id.$ となり、条件 (ii) $\Leftrightarrow \phi^{s+t} = \phi^s \circ \phi^t$ となる。

以下、 X は位相空間、かつ、 $\phi: X \times T \rightarrow X$ は連続写像と仮定する。このときの ϕ を位相力学系という。

定義 2. $T = \mathbb{Z}$ or \mathbb{Z}^+ のとき、離散力学系、 $T = \mathbb{R}$ or \mathbb{R}^+ のとき、連続力学系という。 $T = \mathbb{R}$ の連続力学系を流れ (flow)、 $T = \mathbb{R}^+$ の連続力学系を半流 (semi flow) ともいう。

記号 2. 写像 $f: X \rightarrow X$ に対して、 f^n で $\overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^n$ を表す。

$T = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+$ の離散力学系 ϕ に対し、 $f := \phi^1$ とおくと、 $\phi^n = f^n$ が成り立つ。つまり、 $f = \phi^1$ のみで、 $\phi: X \times T \rightarrow X$ が定まる。よって、 $f: X \rightarrow X$ を力学系とってしまうことが多い。

定義 3. 力学系 $\phi: X \times T \rightarrow X$ 、 $X \ni x$ に対し、

$$\mathcal{O}_\phi(x) := \{\phi^t(x) \mid t \in T\}$$

を x の軌道という。

定義 4. $\phi: X \times T \rightarrow X$ を力学系とする。 $T = \mathbb{Z}$, or, \mathbb{Z}^+ のとき、 $f := \phi^1$ として、 $f^n(x) = x$ となる点 x を (ϕ の) 周期点といい、

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) \mid n \in T\}$$

を (周期点 x の) 周期軌道、

$$n_0 := \min \{n \in T \mid f^n(x) = x, n > 0\}$$

を (周期点 x の) 周期という。 $T = \mathbb{R}$, or, \mathbb{R}^+ のとき、 $\exists \tilde{t} > 0$ s.t. $\phi^{\tilde{t}}(x) = x$ をみたす点 x を (ϕ の) 周期点といい、

$$\mathcal{O}_\phi(x) = \{\phi^t(x) \mid t \in T\}$$

を (周期点 x の) 周期軌道、

$$t_0 := \min \{t \in T \mid \phi^t(x) = x, t > 0\}$$

を (周期点 x の) 周期、 $\phi^t(x) = x$ for $\forall t \in T$ となる点 x を (ϕ の) 平衡点という。

一般に、力学系研究の目標は、与えられた力学系 $\phi: X \times T \rightarrow X$ が、

- どのような軌道をもつか？
- どのような不変集合 ($:= Y \subset X$ s.t. $\phi^1(Y) = Y$) を持つか？

を調べることである。

次に、力学系の軌道の多様さを測る一つの量として、位相的エントロピーを定義する (c.f. [1])。以下、 X を compact space とし、 $f: X \rightarrow X$ を連続写像とする。

まず、 α を X の開被覆 (i.e. $\alpha = \{A_1, \dots, A_n\}$, A_i : open in X , $\bigcup_i A_i = X$) とし、

$$N(\alpha) := \min\{\#\alpha' \mid \alpha' \subset \alpha, \text{ open cover of } X\}$$

$$H(\alpha) := \log N(\alpha)$$

とする。

定義 5.

$$h(f, \alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\alpha))$$

を α に関する f のエントロピーという。

ここで、 f^{-1} 、 \vee の意味は、

- $f^{-1}(\alpha) := \{f^{-1}(A)\}_{A \in \alpha}$
- $\alpha \vee \beta := \{A \cap B\}_{A \in \alpha, B \in \beta}$ for $\beta: X$ の開被覆

であり、得られたものは、再び、 X の開被覆になる。

定義式の右辺の \lim の存在は、次の Remark と Lemma から保証される。

注. α 、 β を X の開被覆とする。

1. $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$ が成立。

$\therefore \alpha' := \{A_1, \dots, A_{N(\alpha)}\}$ 、および、 $\beta' := \{B_1, \dots, B_{N(\beta)}\}$ を、 X を覆う最小成分数の α 、および、 β の sub-cover とする。すると、 $\alpha' \vee \beta' = \{A_i \cap B_j\}_{1 \leq i \leq N(\alpha), 1 \leq j \leq N(\beta)}$ となり、よって成立。 \square

2. $H(f^{-1}(\alpha)) \leq H(\alpha)$ 、とくに、 f が homeo. のとき、 $H(f^{-1}(\alpha)) = H(\alpha)$ が成立。

\therefore 再び、 $\alpha' := \{A_1, \dots, A_{N(\alpha)}\}$ を、 X を覆う最小成分数の α の sub-cover とする。すると、 $\{f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_{N(\alpha)})\}$ は、 $f^{-1}(\alpha)$ の X を覆う sub-cover となり、よって成立。 \square

補題 1. 正の実数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が、 $\forall n, \forall m$ に対し、 $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ を満たすならば、数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ には極限が存在。 \square

定義 6.

$$h(f) := \sup \left\{ h(f, \alpha) \mid \alpha \text{ は } X \text{ の開被覆} \right\}$$

を、 f の位相的エントロピーという。

命題 (位相的エントロピーの性質). $f: X \rightarrow X$ 、 $g: Y \rightarrow Y$ を連続写像とする。

1. $\exists h: X \rightarrow Y$ 、全射連続写像 s.t.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & \circ & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \Rightarrow h(f) \geq h(g).$$

とくに、 $h: \text{homeo.}$ ならば $h(f) = h(g)$ が成立。

2. $k > 0$ 、 $f^k: X \rightarrow X$ に対して、 $h(f^k) = kh(f)$ が成立。
3. $f: \text{homeo.}$ ならば、 $h(f) = h(f^{-1})$ が成立。

2 一次元離散力学系

二次元離散力学系を考察する前に、一次元力学系の関連する話題について述べる。ここでは特に区間 $I := [0, 1]$ 上の力学系について考える。

定理 1 (Li-Yorke [16]). $f : I \rightarrow I$ を連続写像とし、 f の周期軌道の周期の集合を $Per(f)$ とおく。このとき $Per(f) \ni 3$ ならば、任意の自然数 n について、 $n \in Per(f)$ が成立。

この定理は中間値の定理と簡単な記号力学系を用いた考察によって示される。(ちなみに、[16] で初めて力学系の複雑な振る舞いに「カオス」という名が用いられたと言われている。) さらに、次のような精密化も知られている。

定理 2 (Sharkovskii [19, 第三章]). 次のような \mathbb{N} 上の順序を考える。

$$3 > 5 > 7 > \dots > 2 \times 3 > 2 \times 5 > \dots > 2^m \times 3 > 2^m \times 5 > \dots \\ \dots > 2^m > 2^{m-1} > \dots > 2^3 > 2^2 > 2 > 1$$

このとき、 $f : I \rightarrow I$ を連続写像とし、 $Per(f) \ni \ell$ とすると、 $\ell > k$ となる任意の k に対し $k \in Per(f)$ が成立。

また位相的エントロピーと周期軌道の周期の間関係については、次の定理が知られている：

定理 3 (Misiurewicz). $f : I \rightarrow I$ を連続写像とする。このとき、 $h(f) > 0$ となるための必要十分条件は、 f が 2 のべきでない周期の周期軌道を持つことである。

このように区間力学系では、写像の複雑さを調べる上で周期の情報が重要な役割を果たす。しかしながら二次元離散力学系の場合にはもはや周期軌道の周期には、写像の複雑さを保障する情報はなく、周期軌道の braid type を考察する必要性が生じてくる。

3 二次元離散力学系

3.1 Surface automorphism

まず曲面上の自己同相写像について復習する。以下しばらく、 M をコンパクト向き付け可能曲面 (境界 ∂M があっても可)、 A を $\text{int}M$ の有限個の点集合とする。

定義 7. $\varphi : (M, A) \rightarrow (M, A)$ を (M, A) の homeo. とする。このとき、

- φ : **reducible**

$\exists \Gamma = \Gamma^1 \cup \dots \cup \Gamma^k$: a union of essential simple closed curves

$$\Leftrightarrow \text{s.t.} \begin{cases} \Gamma^i \cap \Gamma^j = \emptyset \text{ if } i \neq j \\ \Gamma^i \not\sim \Gamma^j, \text{ not homotopic if } i \neq j \\ \varphi(\Gamma) = \Gamma \\ \chi(\forall \text{connected compo. of } M - (\Gamma \cup A)) < 0 \end{cases}$$

ここで、simple closed curve が **essential** とは、not null-homotopic, not boundary-parallel の意味であり、 $\chi(\cdot)$ は、曲面の Euler 標数を表す。各 Γ^i を **reducing curve** とよぶ。

- φ : **finite order**

$\Leftrightarrow \exists n > 1$ s.t. $\varphi^n(M, A) = id$.

- φ : **pseudo-Anosov**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\mathcal{F}^s, \mu_s), (\mathcal{F}^u, \mu_u): \text{ pair of transverse measured foliations} \\ \exists \lambda > 0 \\ \text{s.t. } \begin{cases} \varphi(\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda} \mu_s) \\ \varphi(\mathcal{F}^u, \mu_u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \mu_u) \end{cases} \end{cases}$$

ここで、transverse measured foliations とは、transverse measures 付きの singular foliations の組で、それらの singular points が一致し、regular leaves が transverse に交わっている、という意味である。また、定数 λ を **expansion factor** とよぶ。

詳しくは [8, Sec.6,p89-] を参照。

定理 4 (Thurston). $\varphi : (M, A) \rightarrow (M, A)$ を (M, A) の *homeo.*、 α を φ の *isotopy class* とする。もし $\chi(M - A) < 0$ ならば、 α は *finite order*、*reducible*、*pseudo-Anosov* のいずれかを必ず含む。

それぞれの場合、isotopy class α を、finite order、reducible、pseudo-Anosov とよぶことにする。

注. 定理 4 の algorithmic proof が Bestvina-Handel によって与えられている [2]。

pseudo-Anosov class に関しては、次が成り立つ。

定理 5 (Handel [14]). $\varphi_1, \varphi_2 : (M, A) \rightarrow (M, A)$ を、互いに *isotopic* な対 (M, A) の *homeomorphisms* とし、 φ_1 は *expansion factor* λ を持つ *pseudo-Anosov* と仮定する。このとき、 $\exists Y$: closed set in M , $\exists g : Y \rightarrow M$, *surjection*, s.t.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi_2|_Y} & Y \\ g \downarrow & \circ & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{\varphi_1} & M \end{array}$$

とくに、 $h(\varphi_2) \geq h(\varphi_1) = \log \lambda$ が成立。

例 (\mathbb{D} , 3 点) 上の pseudo-Anosov homeo.). まず行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が定める一次変換 $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える。 $\det A = 1$ より、この一次変換は、

$$T^2 = \mathbb{R}^2 / \langle x \mapsto x + 1, y \mapsto y + 1 \rangle$$

上の homeo. \tilde{f}_A を誘導する。 A の固有値は、

$$\lambda := \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1, \quad 1/\lambda = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$$

であり、それぞれに対応する固有空間を T^2 上に射影することによって \tilde{f}_A の invariant transverse measured foliation の組 $(\tilde{\mathcal{F}}_u, \tilde{\mathcal{F}}_s)$ が得られる。(とくに \tilde{f}_A は Anosov diffeo. とよばれるものである。)

次に、 $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が定める一次変換 $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える。この S の作用 $x \mapsto -x, y \mapsto -y$ は、 T^2 上の involution i を誘導することがわかり、その商空間 T^2/i は S^2 となる。またこのとき、 $\tilde{f}_A : T^2 \rightarrow T^2$ は、 $\hat{f}_A : T^2/i \cong S^2 \rightarrow S^2$ と S^2 上の invariant transverse measured foliation の組 $(\hat{\mathcal{F}}_u, \hat{\mathcal{F}}_s)$ を誘導する。

一方、 \mathbb{R}^2 上の、 AS の不変集合を考える。積行列 AS による一次変換を考える (A と S は可換なので SA を考えても可) と、この作用の基本領域は、

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

の三角形となり、 \hat{f}_A は不動点 $(0, 0)$ と 3 周期軌道 $\{(0, 1/2), (1/2, 0), (1/2, 1/2)\}$ を持つことが確かめられる。 $\hat{\mathcal{F}}_u, \hat{\mathcal{F}}_s$ はそれぞれ $\tilde{\mathcal{F}}_u, \tilde{\mathcal{F}}_s$ を i で割って得られたものであることに注意すると、 $\hat{\mathcal{F}}_u, \hat{\mathcal{F}}_s$ 共に $\{(0, 0), (0, 1/2), (1/2, 0), (1/2, 1/2)\}$ の点で 1-prong を持つことがわかる。(それ以外の S^2 上の点は全て regular point となる。)

この \hat{f}_A の不動点 $(0, 0)$ を blow up することにより、 $f_A : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, homeo. と invariant transverse measured foliation の組 $(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_s)$ が得られる。従って $f_A : (\mathbb{D}, 3 \text{ 周期軌道}) \rightarrow (\mathbb{D}, 3 \text{ 周期軌道})$ は expansion factor λ を持つ pseudo-Anosov となる。

3.2 Braid type

\mathbb{D} 上の力学系について、その周期軌道を考えるために、その braid type というものを導入する。 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を orientation preserving homeo.、 P を f の不変集合とする。 P の braid type とは本質的には $f|_{\mathbb{D} \setminus P} : \mathbb{D} \setminus P \rightarrow \mathbb{D} \setminus P$ の isotopy class のことである。しかしこのように定めると、 braid type は集合 P ごとに定まるため異なる集合同士の braid type の関係を考察するとき

に不具合が生じる。このような理由から、invariant set の braid type を以下のように定める。

\mathbb{D} の内部の勝手な n 点集合を A_n とおく。 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を orientation preserving homeo.、 P を f の不変集合、 $\sharp P = n$ とする。 $h : (\mathbb{D}, P) \rightarrow (\mathbb{D}, A_n)$ を任意の orientation preserving homeo. とする。 $h \circ f \circ h^{-1} : (\mathbb{D}, A_n) \rightarrow (\mathbb{D}, A_n)$ homeo. の isotopy class $[h \circ f \circ h^{-1}]$ の conjugacy class $\langle [h \circ f \circ h^{-1}] \rangle$ を P の braid type といい $bt(P, f)$ (f がはっきりしている場合は $bt(P)$) と表す。Thurston の分類定理は共役不変なので、 $[h \circ f \circ h^{-1}]$ が finite order, reducible, pseudo-Anosov isotopy class に対応して $bt(P, f)$ を finite order, reducible, pseudo-Anosov と呼ぶことができる。

braid type は、次のようなものとも見ることできる: (\mathbb{D}, A_n) 上の mapping class group を MCG_n とおき、 n -braid group B_n の center を $Z(B_n)$ とおくと、 MCG_n と $B_n/Z(B_n)$ は次の対応によって isomorphic となる。 $g = h \circ f \circ h^{-1}$ とおき、 \mathbb{D} 上の isotopy $\{g_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ s.t. $g_0 = id.$, $g_1 = g$ をとってくる。このとき、

$$b := \bigcup_{0 \leq t \leq 1} (g_t(P) \times \{t\})$$

として得られる braid を考え、写像 $m : [g] \mapsto bZ(B_n)$ を考える。この $m : MCG_n \rightarrow B_n/Z(B_n)$ は isomorphism となることが知られている。従って braid type $b(P, f)$ は $bZ(B_n)$ の conjugacy class と同一視できる。

例えば上の pseudo-Anosov の構成の例で挙げた 3 周期軌道の braid type は $\sigma_1 \sigma_2^{-1} Z(B_3)$ の conjugacy class に対応する。

3.3 Order on BT

ここでは Sharkovskii の定理の二次元版について述べる。記号 BT で、全ての巡回型の braid types の集合とする。ここで、braid type β が巡回型とは、 β から Section 3.2 の方法で得られる braid b を closing してできる絡み目が連結になる、つまり、結び目になることである。この巡回型の braid types の集合 BT に順序を入れることを考える。

まず、 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, homeo. に対して、記号

$$bt(f) := \{bt(P, f) \mid P : \text{periodic orbit}\}$$

を用意しておく。

定義 8 (forcing relation \geq on BT). 集合 BT に次のような二項関係を定める。 $BT \ni \alpha, \beta$ に対して、

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha \in bt(f) \text{ となる任意の } f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \text{ homeo. に対し、 } bt(f) \ni \beta$$

定義より明らかに (i) $\alpha \geq \alpha$, (ii) $\alpha \geq \beta, \beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha \geq \gamma$ である。この二項関係 \geq について、次が示されている。

定理 6 (Boyland [3, Proposition 1]). 二項関係 \geq は、*partial order* になる。つまり、 $\alpha \geq \beta, \beta \geq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ が成立。

問 1. (BT, \geq) を決定せよ。

3-braid type 上の forcing relation は完全に決定されている [13]。また、Smale-horseshoe map で実現される周期軌道の braid type 上の forcing relation については Hall や Carvalho-Hall らによる仕事がある [11][12]。

3.4 Pseudo-Anosov braid type

定理 7 (Hall [10]). $\varphi_1, \varphi_2 : (\mathbb{D}, P) \rightarrow (\mathbb{D}, P)$ を、互いに *isotopic* な対 (\mathbb{D}, P) の *homeomorphisms* とし、 φ_1 は *pseudo-Anosov* と仮定する。このとき、 $bt(\varphi_1) \subset bt(\varphi_2)$ が成立。

定理 7 より次が得られる:

系 1. $BT \ni \beta$, *pseudo-Anosov* とし、 β を代表する *pseudo-Anosov map* を $\varphi_\beta : (\mathbb{D}, P) \rightarrow (\mathbb{D}, P)$ とする。このとき、

$$bt(\varphi_\beta) = \{\gamma \in BT \mid \beta \geq \gamma\}$$

が成立。

つまり $\beta \geq \gamma$ なる γ を決定するには φ_β の周期軌道の braid type を決定すればよい。

勉強会では触れなかったが、Li-Yorke の 2 次元版というべき定理が知られているので述べておく:

定理 8 (Guaschi [9]). $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を *orientation preserving homeo.* とし、3 点又は 4 点からなる集合 $X \subset \mathbb{D}$ に対して $f(X) = X$ とする。もしも $bt(X, f)$ が *pseudo-Anosov* ならば、任意の自然数 n について $n \in Per(f)$ が成立。

一般に、*pseudo-Anosov* φ_1 は異なる周期の周期軌道を無限個持つ。この事と定理 7 より φ_1 と *isotopic* な φ_2 についても、異なる周期の周期軌道が無限個保障される。さらに定理 5 より $h(\varphi_2) > 0$ となる。従って *isotopy class* が *pseudo-Anosov* であることが、ある程度の写像の複雑さを保障する。しかし、与えられた *isotopy class* (あるいは不変集合の braid type) が *pseudo-Anosov* かどうか、どうやって判定するのであろうか? この問いに対して、ここでは次の 3 つの方法を説明する。

- (i) exponential sum
- (ii) Burau matrix

(iii) Algorithm

(i) exponential sum

(i) では $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を homeo. とし、 P を素数周期 q の周期軌道とする。

補題 2. $f|_{\mathbb{D} \setminus P} : \mathbb{D} \setminus P \rightarrow \mathbb{D} \setminus P$ の isotopy class α は irreducible.

Proof. reducible であるとする。 P は periodic orbit であることより、各 reducing curve に含まれる P の要素の個数は同じである。さらに reducible の定義より、そのような個数は 2 以上である。 P の要素の個数 q は素数であることよりこれは矛盾である。 \square

定理 9 (Brouwer). $g : D^2 \rightarrow D^2$: homeo. with $g^n = id$, n は最小とする。このとき g は $2\pi k/n$ ($0 < k < n$) の回転写像と共役。

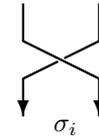
補題 2 と定理 9 の応用を 2 つ述べる。補題 2 より、 α は finite order または pseudo-Anosov。もしも α が finite order ならば明らかに α^q もまた finite order であり $f^q(x) = x$ ($x \in P$) が成り立つ (P は周期 q の周期軌道なので)。従って定理 9 より isotopy class α^q は \mathbb{D} 上の恒等写像を含む。特に次がなりたつ：

定理 10. $x \in P$ と $f(x)$ を結ぶ弧を γ とする。このとき $\gamma \not\sim f^q(\gamma)$, not homotopic relative endpoints ならば α は pseudo-Anosov である。

次に exponential sum を用いて braid type が pseudo-Anosov となるための判定条件を与える：

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ を、 n -string braid group の標準的生成元とする (右図参照) braid $b = \sigma_{n_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{n_k}^{\varepsilon_k}$ に対し、

$$e(b) := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k$$



を、 b の exponential sum という。これは、braid の conjugacy invariant になる。

定理 11 (Boyland). f の周期軌道 P から Section 3.2 で述べた方法で得られる braid を b とおく。このとき

$$e(b) \not\equiv 0 \pmod{q-1}$$

ならば $bt(P, f)$ は pseudo-Anosov.

Proof. 補題 2 より $bt(P, f)$ は finite order または pseudo-Anosov. finite order の場合を考える。定理 9 より b は $\Delta^{kq+1}, \Delta^{kq+2}, \dots, \Delta^{kq+q-1}$ ($k \geq 0$) のいずれかと共役である。 (Δ^q は full twist braid であることに注意。) ここで $\Delta := (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{q-1})$ 又は $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{q-1})^{-1}$. $e(\Delta) = \pm(q-1)$ より $e(\Delta^{kq+l}) = \pm(q-1)(kq+l) \equiv 0 \pmod{q-1}$. exponential sum は conjugacy invariant であるから、 $e(b) \not\equiv 0 \pmod{q-1}$ ならば $bt(P, f)$ は pseudo-Anosov. \square

例. $b = \sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1 \in B_5$ を考える。 $e(b) = 6 \not\equiv 0 \pmod{4}$ より braid type は pseudo-Anosov。 (余談だがこの braid type は Smale-horseshoe map の 5 周期軌道として実現できる。)

(ii) Burau matrix

ここでは、 B_n で n -string braid group を表す。このとき、Burau 表現 $B : B_n \rightarrow GL(n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ を次で定義する。

$$B(\sigma_i) := \begin{matrix} & & & & i \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ i & \cdots & \cdots & & 1-t & t \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{matrix}$$

すると、次が成り立つ。

定理 12 (Kolev [15]). $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}^2$ を \mathbb{D} 上の homeo. とし、 S を有限個の点からなる f の不変集合とする。 $b(S)$ を Section 3.2 で述べた方法によって S から定まる braid とする。このとき、

$$h(f) \geq \max_{t \in \mathbb{C}, |t|=1} \log \rho(B(b(S)))$$

が成り立つ。ここで、 $\rho(A)$ は行列 A のスペクトル半径 (i.e. A の固有値の絶対値の最大値)。

Braid type β に対して $h(\beta) = \inf h(g)$ と定める。ただし、下限は braid type β の不変集合を持つような全ての写像 g に関してとる。 β の既約成分が全て finite order ならば $h(\beta) = 0$ であることが知られている。従って次が成り立つ：

系 2.

$$\max_{t \in \mathbb{C}, |t|=1} \log \rho(B(b(S))) > 0$$

ならば、braid type $bt(S)$ は既約成分として pseudo-Anosov を含む。

例. いくつかの braid b にたいして $\rho(B(b))$ を計算してみる。 $t = e^{i\theta}$ とおき、横軸を θ ($0 \leq 2\pi$), 縦軸を $\rho(B(b))$ としてグラフを書いてみた (このグラフを作成する際に [20] のプログラムを参考にさせていただきました。):

(1) $b(S) = \sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_3$. 図 1 より $\rho(B(b(S))) > 1$. $bt(S)$ は closing すると結び目になることと 3 は素数であることより $bt(S)$ は pseudo-Anosov.

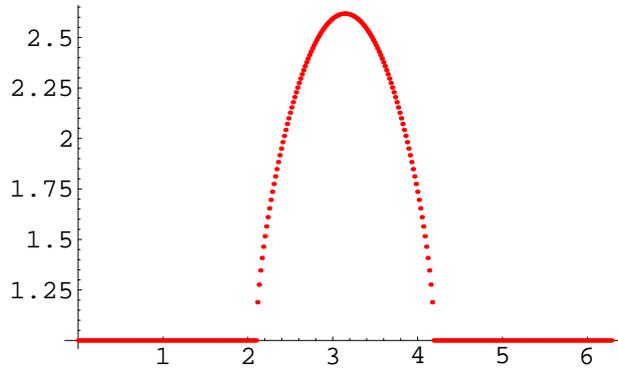


図 1:

(2) $b(S) = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}$. 図 2 より $\rho(B(b(S))) > 1$ だが $b(S)$ は 4-braid であるため、 $bt(S)$ が pseudo-Anosov であることまではわからない (reducible を排除できない)。しかし次で述べる Algorithm を使うと pseudo-Anosov であることが示せる。

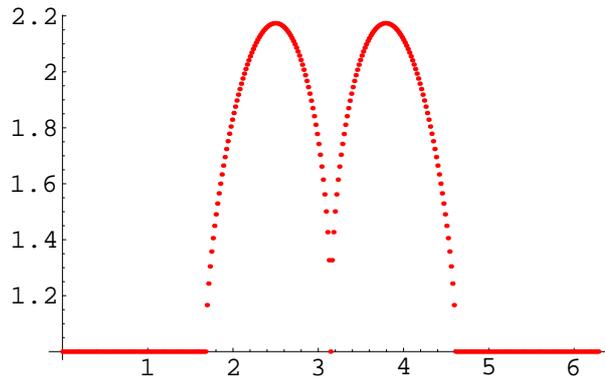


図 2:

(iii) Algorithm

Betivina-Handel のアルゴリズムにもとづき、braid type の Thurston type: periodic, reducible, pseudo-Anosov を判定するプログラム: Trains がある。(下記からダウンロードできる) さらに pseudo-Anosov の場合は、expansion factor と train track の情報を与えてくれる (のでとても楽しい)。

http://www.liv.ac.uk/math/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html

例. (1) $b = \sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_4\sigma_5\sigma_6 \in B_7$. この braid type は pseudo-Anosov で expansion factor は 3.176003. b の train track と track track map は図 3 のようになる。

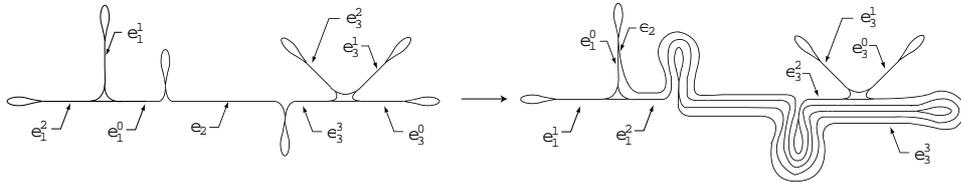


図 3:

(2) $b = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6^{-1}\sigma_7\sigma_8^{-1}\sigma_9\sigma_{10}\sigma_{11}^{-1}\sigma_{10}\sigma_{12}^{-1}\sigma_{13}\sigma_{14}\sigma_{15}\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_6^{-1}\sigma_5\sigma_7\sigma_8\sigma_{15} \in B_{16}$. この braid type は reducible.

参考文献

- [1] 青木統夫, 白岩謙一. 力学系とエントロピー. 共立出版 (1985).
- [2] M. Bestvina and M. Handel. *Train-Tracks for surface homeomorphisms*. *Topology* **34** (1) (1994) 109–140.
- [3] P. Boyland. *Rotation sets and monotone periodic orbits for annulus homeomorphisms*. *Comment. Math. Helv.* **67** (2) (1992) 203–213.
- [4] P. Boyland. *Topological methods in surface dynamics*. *Topology Appl.* **58** (3) (1994) 223–298; also available at <http://www.math.ufl.edu/boyland/papers.html>
- [5] Andrew J. Casson and Steven A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*. Cambridge University Press (1988).
- [6] J. Guaschi. *Pseudo-Anosov braid types of the disc or sphere of low cardinality imply all periods*. *J. London Math. Soc.* **50** (2) (1994) 594–608.
- [7] T. Hall. *Unremovable periodic orbits of homeomorphisms*. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **110** (1991) 523–531.
- [8] Andrew J. Casson and Steven A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*. Cambridge University Press (1988).
- [9] J. Guaschi. *Pseudo-Anosov braid types of the disc or sphere of low cardinality imply all periods*. *J. London Math. Soc.* **50** (2) (1994) 594–608.
- [10] T. Hall. *Unremovable periodic orbits of homeomorphisms*. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **110** (1991) 523–531.

- [11] T. Hall. *The creation of horseshoe*. Nonlinearity **7** (1994) 861–924.
- [12] A. de Carvalho and T. Hall. *Braid forcing and star-shaped train tracks*. To appear in Topology.
- [13] M. Handel. *The forcing partial order on the three times punctured disk*. Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (3) (1997) 593–610.
- [14] M. Handel. *Global shadowing of pseudo-Anosov homeomorphisms*. Ergodic Theory Dynam. Systems **5** (3) (1985) 373–377.
- [15] B. Kolev. *Entropie topologique et representation de Burau*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **309** (13) (1989) 835–838; English translation is available at <http://jp.arxiv.org/abs/math.DS/0304105>
- [16] T. Li and J. Yorke. *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly **82** (1975) 985–992.
- [17] L. E. J. Brouwer. *Über die periodischen Transformationen der Kugel*. Math. Ann. **80** (1919) 39–41.
- [18] 松岡 隆. 組みひもの理論と力学系. (講義ノート) 物性研究 **67-1** (1996) 1–56; also available at <http://jegog.phys.nagoya-u.ac.jp/r/lecture-notes/kumihimo/kougi6.pdf>
- [19] C. ロビンソン; 國府寛司, 柴山健伸, 岡宏枝訳. 力学系 (上). シュプリンガー・フェアラーク東京 (2001).
- [20] 山口喜博, 谷川清隆. Standard Mapping における Non-Birkhoff 型周期軌道と位相エントロピー; available at <http://th.nao.ac.jp/tanikawa/Yamag2/yoko.pdf>