メビウス変換について

木戸哲也（大阪大学 D1）

関西低次元トポロジー若手勉強会
2003 年 3 月 9 日

概 要

四次元双曲空間の等長変換群の、四元数係数 2×2 行列による表示を与える。また固定点による isometry の分類を行列で表現する。

1 四元数とメビウス変換

よく知られているように、

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, ad - bc = 1 \right\}$$

は、一次分数変換（**Möbius 変換**）

$$A(z) = (az+b)(cz+d)^{-1} \qquad \text{for } z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{C}}$$

として、リーマン球 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{C}}$ に作用する。この作用は、いわゆる **Poincarè extension**

$$A : (u,t) \mapsto (A(u), t') \qquad \text{for } u \in \mathbb{C},\ t' \in \mathbb{R}_{>0}$$

により、上半空間 $\mathbf{H}^3$ への作用に拡張される。この作用は、center $\pm I$ で割った $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\pm I$ の作用を、自然に induce する。これが、ちょうど $\mathbf{H}^3$ に Poincarè 計量を入れて 3 次元双曲空間とみなしたときの、向きを保つ等長変換群の作用と一致することが分かる。

さてここで、上記の (u,t) を $z = u + tj$ として、**四元数（quaternion）**

$$\mathbb{H} = \{x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k\}$$

の元だとみなし、さらに、$a,b,c,d \in \mathbb{C} = \{x + yi,\ x,y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$ とみなしてみる。

すると、$A(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$ で定まる、$GL(2,\mathbb{H})$ の元 A の $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ への作用が、自然に得られる。ここで、

$$GL(2,\mathbb{H}) = \{A \in M(2,\mathbb{H}) \mid \exists B \in M(2,\mathbb{H}) \text{ s.t. } AB = I\}$$

としている。

前述のように、$PSL(2,\mathbb{C})=SL(2,\mathbb{C})/\pm I$ の作用が、3次元双曲空間（の上半空間モデル $\mathbf{H}^3$）の向きを保つ等長変換群の作用と一致することから、次の問題が考えられる。

問題. $GL(2,\mathbb{H})$ の部分群 G で、G/center の作用が、４次元双曲空間（の上半空間モデル）の向きを保つ等長変換群の作用と一致するものはあるか？

ここで、４次元双曲空間の上半空間モデルとは、４次元上半空間 $\mathbf{H}^4=\{x_0+x_1i+x_2j+x_3k \mid x_3>0\}\subset\mathbb{H}$ に双曲計量

$$\frac{{dx_0}^2+{dx_1}^2+{dx_2}^2+{dx_3}^2}{{x_3}^2}$$

を入れたものとする。

また、$\mathbb{H}$ の非可換性から、$GL(2,\mathbb{H})$ の center は実数成分のスカラー行列

$$\left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}^*\right\}$$

になることがわかる。

2 四次元双曲空間の等長変換群

前節の問題に答えるため、まず 4 次元双曲空間の unit ball モデル $\mathbf{D}^4\subset\mathbb{R}^4\cong\mathbb{H}$ を（一次分数変換で定まる作用で）不変にする $GL(2,\mathbb{H})$ の部分群を求める。

欲しい群 G（の一次分数変換作用）は、$\mathbf{D}^4$ を不変にするという要請から、

1. $|z|=1$ for $z\in\mathbb{H}\Longrightarrow|A(z)|=1$ for $\forall A\in G$.
2. $|A(0)|<1$ for $\forall A\in G$.

という条件が得られる。これらの条件を書き下すことにより、次が得られる。

命題 1. $GL(2,\mathbb{H})$ の部分群

$$S_P{}^J(1,1):=\left\{A\in GL(2,\mathbb{H})\ \middle|\ \bar{A}^tJA=J\right\},\quad \textit{where } J=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は、一次分数変換で定まる作用で $\mathbf{D}^4\subset\mathbb{R}^4\cong\mathbb{H}$ を不変にする。

この G に対し、Lie 環を計算してみると、

$$\left\{\begin{pmatrix} \alpha & z \\ \bar{z} & \beta \end{pmatrix}\ \middle|\ Re(\alpha)=Re(\beta)=0,\ z\in\mathbb{H}\right\}$$

となり、実 10 次元であることが分かる。これは、次元の計算だけで考えても reasonable である。

この G の元の作用が、実際、4 次元双曲空間の isometry であることを確かめるため、次に、上半空間モデル $\mathbf{H}^4$ への作用に変換する。

そこで、図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^4 & \xrightarrow{A\in G} & \mathbf{H}^4 \\ \varphi\big\downarrow & & \big\downarrow\varphi \\ \mathbf{D}^4 & \xrightarrow[B\in G]{} & \mathbf{D}^4 \end{array}$$

を考えると、$\varphi(z) = (z-k)(z+k)^{-1}$ のとき、可換になることがわかる。またこのとき、

$$B = QAP, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 1 & k \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{pmatrix}$$

となっている。

そこで、

$$PQ = QP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

より、

$$S_P{}^K(1,1) := \left\{ A \in GL(2,\mathbb{H}) \;\middle|\; \bar{A}^t K A = K \right\},\ \text{where } K = \frac{1}{2} QJP = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、次が成り立つ。

命題 2. $GL(2,\mathbb{H})$ の部分群 $S_P{}^K(1,1)$ は、一次分数変換で定まる作用で $\mathbf{H}^4 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ を不変にする。

この $S_P{}^K(1,1)$ の各元の $\mathbf{H}^4$ への作用が、双曲計量

$$ds^2 = \frac{dx_0{}^2 + dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2}{x_3{}^2}$$

に関して isometry であることは、次の補題からわかる。

補題 1. $A \in GL(2,\mathbb{H})$ に対し、次が成立。

1. *$A(z) = -z^{-1}$ は $\left(\mathbf{H}^4, ds^2\right)$ の isometry。*
2. *$A(z) = z + b$ $(b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \mathbb{H})$ が $\left(\mathbf{H}^4, ds^2\right)$ の isometry $\Leftrightarrow b_3 = 0$*
3. *$A(z) = aza$ $(a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H})$ が $\left(\mathbf{H}^4, ds^2\right)$ の isometry $\Leftrightarrow a_3 = 0$*

逆に、$\left(\mathbf{H}^4, ds^2\right)$ の isometry は上記の３つの写像の積で表されることがわかる。従って、$GL(2,\mathbb{H})$ の部分群 ${S_P}^K(1,1)$ に対し、${S_P}^K(1,1)/\mathrm{center}$ の作用は、４次元双曲空間の上半空間モデル $\left(\mathbf{H}^4, ds^2\right)$ の、向きを保つ等長変換群 $Isom_+(\mathbf{H}^4)$ の作用と一致することがわかる。

まとめると、次のようになる。

dim n	2	3	4
$\curvearrowright \mathbf{H}^n$	$SL(2,\mathbb{R})$	$SL(2,\mathbb{C})$	${S_p}^K(1,1)$
$\curvearrowright \mathbf{D}^n$	$SU(1,1)$		${S_p}^J(1,1)$
$\curvearrowright$hyperboloid	$SO_0(2,1)$	$SO_0(3,1)$	$SO_0(4,1)$

これ以外の記述として、Ahlfors、和田 [2] による Clifford 代数を用いたものが知られている。

3　固定点集合

前節で得られた、$GL(2,\mathbb{H})$ の部分群 ${S_P}^K(1,1)$ による、$Isom_+(\mathbf{H}^4)$ の表示を用いて、isometry の $\left(\widehat{\mathbf{H}^4}\text{での}\right)$ 固定点集合による分類を試みる。

すぐ分かるように、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto (az+b)(cz+d)^{-1}$$

は、$c=0$ のとき、無限遠点 ∞ を固定する。よって、以降は簡単のため、$c \neq 0$ と仮定する。

まず、$\mathbb{H} \ni z = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ に対し、$z^* := x_0 + x_1 i + x_2 j - x_3 k$ とすると、次が成立する。

補題 2. ${S_P}^K(1,1) \ni A$ に対し、$A(z) = z \Leftrightarrow A(z^*) = z^*$

これは、等式 $z^* = -k\bar{z}k$、および、これから従う ${S_P}^K(1,1)$ の元の特徴付け

$${S_P}^K(1,1) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix}$$

に依る。

この**補題 2** により、${S_P}^K(1,1) \ni A$ の $\mathbb{H}$ 全体への作用の固定点は、$\partial\mathbf{H}^4$ に関して対称にあることが分かる。この観察と、次節の四元数係数二次方程式の解の個数の判別式をあわせると、次の定理が得られる。

定理.

$${S_P}^K(1,1) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k & b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \\ c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k & d_0 + d_1 i + d_2 j + d_3 k \end{pmatrix}$$

とするとき、以下が成立。

- A が $\mathbf{H}^4$ 内に唯一の固定点を持つ $\Leftrightarrow \Delta < 0$
- A は $\mathbf{H}^4$ 内の境界に直交する $disk$ を固定 $\Leftrightarrow \Delta = c_3 = 0, (a_0 + d_0)^2 < 4$
- $\Delta = 0 \ \& \left(c_3 \neq 0, or, \left(c_3 = 0, (a_0 + d_0)^2 = 4\right)\right) \Rightarrow A$ は $\partial\mathbf{H}^4$ に唯一の固定点を持つ
- $\left(\Delta = 0, c_3 = 0, (a_0 + d_0)^2 > 4\right) or \ (\Delta > 0, c_3 \neq 0) \Rightarrow A$ は $\partial\mathbf{H}^4$ に 2 つの固定点を持つ
- それ以外、つまり、$\Delta > 0, c_3 = 0$ のとき、A は $\partial\mathbf{H}^4$ に 1 点か 2 点の固定点を持つ

ここで、$\Delta := (a_1 + d_1)^2 + (a_2 + d_2)^2 + (a_3 - d_3)^2 + 4c_3b_3$ である。

4　四元数係数二次方程式

${S_P}^K(1,1) \ni A$ の $\mathbb{H}$ への作用の固定点を求めるには

$$(az + b)(cz + d)^{-1} = z$$

の解を求めれば良い。これは変形すると $zcz - az + zd - b = 0$ となる。ここで、$c \neq 0$ と仮定し、$w := cz + d$ とおくと、

$$w^2 - \left(cac^{-1} + d\right) w + \left(cac^{-1}d - cb\right) = 0$$

という二次方程式が得られる。

そこで、改めて、この型の四元数係数二次方程式

$$f(z) = z^2 - az + b = 0$$

の解の個数の判別を考える。

注. 四元数係数二次方程式の解の様子は、通常の実数係数のものとは大きく異なる。簡単な例として、$(a, b) = (0, 1)$、つまり、$f(z) = z^2 + 1$ の場合を考えてみる。このとき、$f(z) = 0$ を変形すると、

$$z + \bar{z} = 0, \ |z|^2 = 1$$

となり、$f^{-1}(0)$ が位相的に 2-sphere であることがわかる。実際、写像 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ は、ほとんどの $z \in \mathbb{H}$ で 2:1 だが、実軸の負の部分では、1 点の逆像が位相的に 2-sphere であることがわかる。

注で述べたように、$f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ は、ほとんどの $z\in\mathbb{H}$ で 2:1 となる。そうでない点は、実は、ちょうどヤコビ行列

$$\left(\frac{\partial f^l}{\partial x_m}(z)\right)_{0\le l,m\le 3}$$

の det が消えるところになる（ここでは f を $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ の写像だとみなしている）。実際、$z=x_0+x_1i+x_2j+x_3k,\ a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ として、計算してみると、

$$det=(2x_0-a_0)^2\left(\sum_{n=0}^{3}(2x_n-a_n)^2+\sum_{n=1}^{3}{a_n}^2\right)+\left(\sum_{n=1}^{3}a_n(2x_n-a_n)\right)^2\ge 0$$

となる。これより、

$$det=0\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}a_0,\ 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{a}|^2$$

がわかる（ここで、$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$、$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\cdot$ はユークリッド内積)。この観察より、次の補題を導くことができる。

補題 3. 四元数係数二次方程式 $f(z)=z^2-az+b=0$ に対し、以下が成立。

$$\begin{array}{rcc}\#\{f(z)=0\}=1 & \Leftrightarrow & (a,b)\in D-E\\ \#\{f(z)=0\}=2 & \Leftrightarrow & (a,b)\notin D\\ \{f(z)=0\}\cong\mathbf{S}^2 & \Leftrightarrow & (a,b)\in E\end{array}$$

ここで、

$$\begin{array}{rcl}a&=&a_0+a_1i+a_2j+a_3k,\\ b&=&b_0+b_1i+b_2j+b_3k,\\ \boldsymbol{a}&=&(a_1,a_2,a_3),\\ \boldsymbol{b}&=&(a_1,a_2,a_3),\\ D&=&\left\{(a,b)\in\mathbb{H}^2\ \middle|\ \begin{array}{l}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}a_0|\boldsymbol{a}|^2\\ |\boldsymbol{b}|^2=\left(b_0-\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2\right)|\boldsymbol{a}|^2\\ b_0-\frac{1}{4}{a_0}^2+\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2\ge 0\end{array}\right\}\\ E&=&\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 4b-a^2>0\right\}\end{array}$$

である。

余談：Milnor の exotic 7-sphere [1]

四元数 $\mathbb{H}$ の非可換性は、Milnor により、いわゆる exotic 7-sphere の構成に、次のように使われた。

まず $\mathbb{H}^2 - \{(0,0)\}$ 上の同値関係

$$(x,y) \sim (x\alpha, y\alpha) \qquad \text{for } \exists\alpha \in \mathbb{H}^*$$

を考える。この商をとることにより、

$$\mathbb{H}^2 \supset \mathbf{S}^7 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{H}) \cong \mathbf{S}^4$$

という、$\mathbf{S}^7$ を全空間とする $\mathbf{S}^4$ 上の $\mathbf{S}^3$-bundle sturucture が得られる。ここで、この bundle structure をひねると、ある 7 次元多様体 M で、$\mathbf{S}^7$ と位相同相だが、微分同相でないものが構成されるのである。

参考文献

[1] J. Milnor: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Ann. of Math. (2) **64** (1956), 399–405.

[2] M. Wada: Conjugacy invariants of Möbius transformations. Complex Variables Theory Appl. **15** (1990), no. 2, 125–133.