Heegaard splitting & curve complex

斉藤敏夫（大阪大学 D 2）

関西低次元トポロジー若手勉強会
2003 年 3 月 8 日

概 要

J. Hempel の論文 '3-manifolds as viewed from the curve complex' の紹介をする。

1 Heegaard splitting

以下を通して、S を closed orientable surface of genus $g \geq 2$ とする。

定義 1 (Compression body). X を S 上の essential loops の disjoint union とする。このとき、

$$S \times [0,1] \bigcup_{X \times \{1\}} \text{2-handles} \bigcup \text{3-handles}$$

で得られる境界付き 3 次元多様体 V_X を **compression body** という。ここで、3-handles は全ての 2-sphere 境界成分を埋める、と仮定しておく。

この定義で、$S \times \{0\}$ 以外に境界がない compression body が、いわゆる handle body となる。

定義 2 (Heegaard splitting). X、Y を S 上の essential loops の disjoint unions とし、V_X、V_Y を対応する compression bodies とする。

$$V_X \bigcup_{S \times \{0\}} V_Y$$

で得られる 3 次元多様体を M_{XY} としたとき、$(S; V_X, V_Y)$ を M_{XY} の **Heegaard splitting** という。

以下、全ての 3 次元多様体は orientable とする。

事実 1. 任意の *compact 3-manifold* は *Heegaard splitting* を持つ。

また、M が空でない境界を持つ場合、その成分たちを適当に配分するような Heegaard splitting がいつでも存在する。

定義 3. $(S; V_X, V_Y)$ を M_{XY} の Heegaard splitting とする。

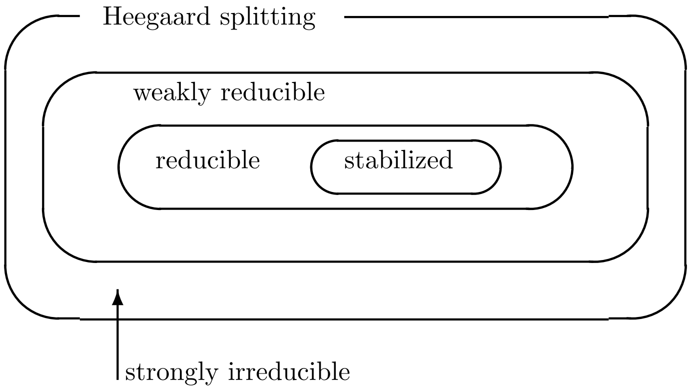
- $(S; V_X, V_Y)$ が **reducible** $\Leftrightarrow \exists D_1 \subset V_X, \exists D_2 \subset V_Y$ such that $\partial D_1 = \partial D_2$.
- $(S; V_X, V_Y)$ が **weakly reducible** $\Leftrightarrow \exists D_1 \subset V_X, \exists D_2 \subset V_Y$ such that $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$.
- $(S; V_X, V_Y)$ が **stabilized** $\Leftrightarrow \exists D_1 \subset V_X, \exists D_2 \subset V_Y$ such that $|\partial D_1 \cap \partial D_2| = 1$.

reducible でない Heegaard splitting を **irreducible** といい、weakly reducible でない Heegaard splitting を **strongly irreducible** という。

事実 2. $(S; V_X, V_Y)$ を M_{XY} の *Heegaard splitting* とする。

- S の種数が *2* 以上のとき、$(S; V_X, V_Y)$*: stabilized* $\Rightarrow$ $(S; V_X, V_Y)$*: reducible.*
- $(S; V_X, V_Y)$*: reducible* $\Rightarrow$ M_{XY}*: reducible or* $(S; V_X, V_Y)$*: stabilized*
- $(S; V_X, V_Y)$*: weakly reducible* $\Rightarrow$ M_{XY}*: Haken or* $(S; V_X, V_Y)$*: reducible.*

以上をまとめると、



ある意味で、weakly reducible Heegaard splitting はよく分かっている（使いやすい)。そこで、strongly irreducible Heegaard splitting を調べたい。

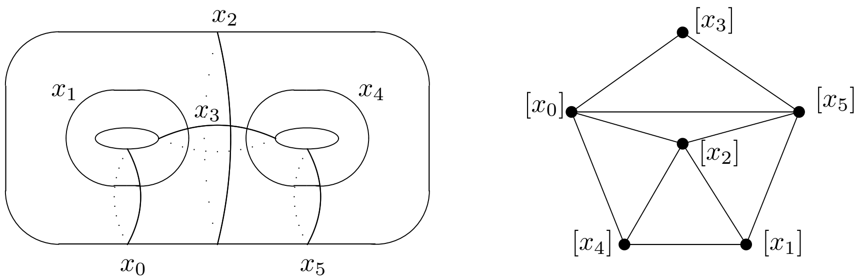
2 Curve complex

定義 4. 次のようにして得られる complex $C(S)$ を **curve complex** という。

- 0-simplex $\Leftrightarrow$ an isotopy class of an essential loop on S.
- $x_0, x_1, \ldots, x_k$ が k-simplex を張る $\Leftrightarrow$ うまい代表元をとった時、$x_i \cap x_j = \emptyset$ for $0 \leq i \neq j \leq k$.

S の種数 g のとき、$C(S)$ の次元は $3g-4$ になる。

例 1. 左図のような curves $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \subset S$ のイソトピー類は、curve complex $C(S)$ 内で、右図のような subcomplex に対応する。但し、右図の各三角形は 2 単体を張っている。



定義 5. x、y を $C(S)$ の 0-単体とする。これらの間の距離 $d(x,y)$ を次で定義する。

$$d(x,y) := \min\big\{\#(\text{0-simplices on the shortest path joining } x \text{ to } y)\big\}$$

事実 3.

- $C(S)$ は *locally finite* でない。
- $C(S)$ の *diameter* は無限。
- $C(S)$ は連結。

3 Distance of Heegaard splitting

以下、X、Y を S 上の essential loops の disjoint unions で、（言い換えると、$C(S)$ の単体で）対応する compression bodies V_X、V_Y が handle bodies となるものとする。

次のような、$C(S)$ の subcomplex を考える。

$$K_X := \left\{ X' : \begin{array}{l} S \text{ 上の essential loops} \\ \text{の disjoint unions} \end{array} \;\middle|\; (V_{X'}, S) = (V_X, S) \right\}$$

同様に、K_Y も定義する。

事実 4. K_X、K_Y は *connected*、かつ、*diameter* は無限。

定義 6. $(S;V_X,V_Y)$ を M_{XY} の Heegaard splitting とする。このとき、$(S;V_X,V_Y)$ の **distance** を、

$$d(K_X,K_Y)=\min\left\{d(x,y)\;\middle|\;x\in K_X, y\in K_Y\right\}$$

と定義する。

注.

- $d(K_x,K_Y)=0 \Leftrightarrow (S;V_X,V_Y)$: reducible
- $d(K_x,K_Y)\le 1 \Leftrightarrow (S;V_X,V_Y)$: weakly reducible

4 Results

よく知られているように、closed irreducible 3-manifold は、次のように分類される。

$$\text{closed irreducible 3-manifold}\begin{cases}\text{Seifert}\begin{cases}\text{B: base space, orientable}\\ \text{non-orientable}\end{cases}\\ \text{Toroidal}\\ \text{Hyperbolike}\end{cases}$$

定理 (Hempel [1]). *M を closed irreducible 3-manifold とし、$(S;V_X,V_Y)$ を M の Heegaard splitting とする。M が Seifert か toroidal ならば、$(S;V_X,V_Y)$ の distance は 2 以下。*

系. *もし closed irreducible 3-manifold M が、distance≥ 3 の Heegaard splitting を持てば、M は hyperbolike。*

次の事実は、定理の逆は成り立たないことを示している。

事実 5. *S^3 内の 2-bridge knot の non-trivial Dehn surgery で得られる hyperbolike 3-manifold の genus two Heegaard splitting の distance は 2。*

以下、M が irreducible Seifert fibered space with orientable base space B の場合の証明の概略を述べる。この場合は、[2] により、M の任意の irreducible Heegaard splitting は **vertical** か **horizontal** となる。

4.1 Vertical splitting of Seifert fibered space

まず vertical Heegaard splitting を定義する。$f:M\to B$ を射影とする。Base space B を次のように $D\cup E\cup F$ に分割する。

- D、E の各連結成分は高々 1 個の singular point を含む closed 2-cell。

- 　F の各連結成分は singular point を含まない square で、向かい合う 1 組の辺は D に含まれ、もう 1 組は E に含まれる。

- D、E、F の内点同士は交わらない。

この分割に対し、

$$V_1 = f^{-1}(D) \cup F \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$V_2 = f^{-1}(E) \cup F \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

とすると、これは M の Heegaard splitting を与えることが分かる。ここで、$f^{-1}(F) \cong F \times S^1 \cong F \times [0,1]/\mathrm{id}.$ とみなしている。こうして得られた Heegaard splitting を、M の **vertical splitting** という。以下、vertical splitting の distance≤ 2 を示す。

$|F$ の連結成分$| \geq 2$ の場合。F_1、F_2 を異なる F の成分とする。F_1 内の E と交わる辺たちをつなぐ properly embedded arc a_1、F_2 内の D と交わる辺たちをつなぐ properly embedded arc a_2 をとる。すると、$f^{-1}(a_1)$ は V_1 の meridian disk、$f^{-1}(a_2)$ は V_2 の meridian disk を与えることが分かる。これらは互いに交わらないので、Heegaard splitting $V_1 \cup V_2$ は weakly reducible、つまり distance$= 0$。

$|F$ の連結成分$| \leq 1$ の場合。まず、

- B が S^2 上 singular points が 3 点の orbifold、

- D: 2 つの連結成分 $D_1 \sqcup D_2$ からなる、

- E、F: connected、

- D_1、D_2、F: ちょうど 1 点の singular point を含む closed 2-cell、

の場合を考える。この F 内で、E と交わる辺たちをつなぐ properly embedded arc a_1、D と交わる辺たちをつなぐ properly embedded arc a_2 をとると、やはり、$f^{-1}(a_1)$ は V_1 の meridian disk、$f^{-1}(a_2)$ は V_2 の meridian disk を与えることが分かる。ここで、$D_1 \cap F$ の arc 上から、適当に 1 点 x をとり、loop $f^{-1}(x)$ を考える。するとこれは、曲面上の essential loop であり、$f^{-1}(a_1)$、$f^{-1}(a_2)$ と交わらない。よって、$d(\partial f^{-1}(a_1), \partial f^{-1}(a_2)) \leq 2$ がわかる。つまり、distance≤ 2。

上の仮定が満たされていない場合、M は Lens space になることがわかる (含む S^3、$S^2 \times S^1$)。このとき、対応する Heegaard splitting が、genus≥ 2 なら、それは reducible となることが知られており、distance$= 0$。genus$= 1$ のときは、distance は定義されていない。

4.2 Horizontal splitting of Seifert fibered space

Horizontal Heegaard splitting を許容する Seifert fibered space は、次のような M に限る。まず

$$N = F \times [0,1]/(x,0) \sim (\psi(x),1)$$

を用意する。ここで、F: connected orientable surface$\neq B^2$、$|\partial F| = 1$、かつ、$\psi : F \to F$ orientation preserving periodic homeo.。

$$M = N \bigcup_f (B^2 \times S^1)$$

ここで、$f : \partial(B^2 \times S^1) \to \partial N$ は、次で決まる homeo.：
∂F と S^1 方向に 1 回はしる loop で代表される $H_1(\partial N)$ の basis μ、λ をとったとき、$[f(\partial B^2 \times \{*\})] = \lambda + n\mu$ for some n。

この M には次のようにして Heegaard splitting が定まる。l_1、l_2 を $f^{-1}(\partial F \times \{0\})$、$f^{-1}(\partial F \times \{1/2\})$ とし、$B^2 \times S^1$ を $l_1 \cup l_2$ の張る annulus で切り開いて得られる solid tori を U_1、U_2 とする。但し、$F \times (1/2, 1) \cap U_1 = \emptyset$、$F \times (0, 1/2) \cap U_2 = \emptyset$。このとき、

$$V_1 = F \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \bigcup U_1$$

$$V_2 = F \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \bigcup U_2$$

は、それぞれ handle body となることがわかる。こうして得られた Heegaard splitting を、M の **horizontal splitting** という。以下、horizontal splitting の distance≤ 2 を示す。

A を、F 上の essential 1-manifold で $F - A$: 2-cell を満たすものとし、その 1 つの成分 γ をとる。すると、

$$\gamma \times [0,1] \cap F \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \ , \ \gamma \times [0,1] \cap F \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

を拡張して、V_1、V_2 の meridian disks が得られることが分かる。これら同士は一般に交わるが、γ が F を分離しないことに注意すると、どちらとも交わらない $F \times \{1/2\}$ 上の essential loop が見つかる。つまり、得られた Heegaard splitting $V_1 \cup V_2$ の distance≤ 2 がわかる。

参考文献

[1] J. Hempel. *3-manifolds as viewed from the curve complex.* Topology **40** (2001), no. 3, 631–657.

[2] Y. Moriah and J. Schultens. *Irreducible Heegaard splittings of Seifert fibered spaces are either vertical or horizontal.* Topology **37** (1998), no. 5, 1089–1112.