双曲多様体間の被覆写像について

宮地 秀樹 (大阪市立大学理学研究科)

２００３年３月７日 (金曜日, 双曲幾何の日)
『関西低次元トポロジー若手研究会』 (大阪大学)

1　講演における主結果

この講演では，W.Thurston [7] と D.Canary [4] による双曲多様体間の被覆写像に関する結果を彼らの論文を元に説明する。この講演での主結果は次の通り。

Theorem 1.1. 二つの双曲多様体間の被覆写像 $p : \hat{N} \to N$ を考える。$\hat{N}$ はコンパクト多様体の内部と同相であると仮定する。$\hat{E}$ を $\hat{N}^0_\epsilon$ の幾何学的無限な端とする。このとき，次の２つのうちのどちらか一方が成立する。

(1) $\hat{E}$ は $p\,|_{\hat{U}}$ が有限被覆になるような近傍 $\hat{U}$ を持つ。

(2) N の体積は有限であり，で S^1 上の曲面バンドルと同相な双曲多様体 N' をその有限被覆多様体として持つ。更に，N' のファイバーに対応する被覆多様体を N_S と書けば，$\hat{N}$ は N_S に有限葉で被覆される。また，$\hat{N} \neq N_S$ であれば $\hat{N}$ は *twisted I-bundle* と同相であり，N_S に２重被覆される。

M の仮定の『コンパクト多様体の内部と同相』という性質は特殊な状況では無いと考えられている。実際，任意の有限生成な基本群を持つ双曲多様体はそうであると予想されている (Marden [6])。また F.Bonahon [3] により，その凸核 (compact core) の境界の各成分が圧縮不能であればコンパクト多様体の内部と同相であることが示されている。特に，閉曲面群と同型な基本群を持つ双曲多様体はそうであり，従って，(閉曲面) $\times \mathbb{R}$ と同相である。

2　主結果の系

この定理は非常に応用範囲が広い。ここではその一端を説明する。

2.1 函数論方面への応用

Thurston [7] はこの被覆写像の定理を，群の列の極限に現れる群を決定するために考えた (と，彼の Lecture note を読むとそう思われる)。彼の問題意識を説明するために少し言葉を用意する。

S を種数が 2 以上の閉曲面とする。$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ を表現とする。このとき ρ は，(中への) 同型であって，その像 $\rho(\pi_1(S))$ が擬フックス群であるときにが**擬フックス群表現**と呼ばれる。表現の列 $\{\rho_n\}_n$ が表現 ρ_∞ に**代数的に収束**するとは，$\rho_n(\gamma) \to \rho_\infty(\gamma)$ が任意の $\gamma \in \pi_1(S)$ について成立するときにそう呼ばれる。また，群の列 $\{G_n\}_n$ が次の 2 つの条件を満たすとき群 G に**幾何学的に収束**すると言う：

1. 任意の $g \in G$ に対して $g_{n_j} \in G_{n_j}$ が存在して，$g_{n_j} \to g$ である。
2. 列 $\{g_{n_j}\}_j$, $g_{n_j} \in G_{n_j}$ に対して g_{n_j} が元 $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ に収束するならば，$g \in G$ である。

表現の列 $\{\rho_n\}_n$ が ρ_∞ に代数的に収束して，群の列 $\{\rho_n(\pi_1(S))\}_n$ が群 $\rho_\infty(\pi_1(S))$ に幾何的に収束するとき，表現の列 $\{\rho_n\}_n$ は ρ_∞ に**強収束**すると言われる。定義より，幾何学的収束による極限は代数的極限の極限を部分群として含むが，一般には幾何的極限 G は $\pi_1(S)$ とは同型ではない。

幾何学的極限の多様体は，与えられた表現の列に対応する多様体の列の『潰れ方』を表現していると考えられる。実際，多様体列 $\{\mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(S))\}_n$ は $\mathbb{H}^3/G$ に (基点を適当に決めることにより)Gromov の意味で収束する。

ここでの問題は，

問題． 擬フックス群表現の列 $\{\rho_n\}_n$ が ρ_∞ に代数的に収束するとき，いつこの列が強収束するか？

である。現在この問題は予想として定式化され，『Jørgensen の予想』として知られている。この予想の周辺は Anderson-Canary [1], [2] に詳しい。

Thurston はこの被覆写像の定理を使って，代数的極限の極限集合がリーマン球面全体であればこの収束が強収束であることを示した (実はもっと一般的なことを証明しているが，ここでは簡単な状況を考える)。

(大体の証明のあらまし)． ここでは簡単のために $\Gamma := \rho_\infty(\pi_1(S))$ は放物的元を含まないとする。代数的極限の与える多様体を $N_\infty = \mathbb{H}^3/\Gamma$, 幾何学的極限の与える多様体を $M = \mathbb{H}^3/G$ とする。N_∞ は $S \times \mathbb{R}$ ど同相である (Thurston は代数的極限の群に関してはこれを示している。もちろん Bonahon の定理よりこれは極限と仮定しなくても正しい)。代数的極限が幾何学的極限の部分群であることから，被覆写像 $p : N_\infty \to M$ が定まる。仮定から N_∞ の二つの端は両方とも幾何学的無限であり，M は体積無限な多様体の極限なので M 自身体積無限になる。故に，被覆写像の定理 (Theorem 1.1) から幾何学的無

限な端ではこの被覆写像は有限被覆であることが分かる。従って，この被覆空間 (N_∞, p, M) は有限被覆空間であることが分かる。つまり Γ は G の有限位数部分群である。

任意の $g \in G$ をとり固定する。上の議論より，ある m で $g^m \in \Gamma$ である。さて，$g^m = \rho_\infty(\gamma)$ とする。また $\gamma_{n_j} \in \rho_{n_j}(\pi_1(S))$ を $\gamma_{n_j} \to g$ になるものをとる。このとき，メビウス変換の列 $\{\gamma_{n_j}^{-m} \circ \rho_{n_j}(\gamma)\}_j$ を考えるとこの列は恒等写像に収束する。一方，G の離散性から適当な $x_0 \in \mathbb{H}^3$ をとると，ある $\epsilon_0 > 0$ が存在して，任意の n と任意の $\gamma' \in \pi_1(S)$ について，$d_{\mathbb{H}^3}(x_0, \rho_n(\gamma')(x_0)) \geq \epsilon_0$ である。一方，$\gamma_{n_j}^{-m} \circ \rho_{n_j}(\gamma) \in \rho_{n_j}(\pi_1(S))$ であるので，十分大きな j について $\gamma_{n_j}^m = \rho_{n_j}(\gamma)$ となることがわかり，結局，ρ_n は同型であるので，このことはある $\gamma_0 \in \pi_1(S)$ が存在して $\gamma = \gamma_0^m$ となる。今，曲面群において方程式 $g^m = h$ の根は存在すれば唯一つである（証明：もし，S が境界を持てば $\pi_1(S)$ は自由群なので OK. もし，S が閉曲面であればそれを表現するフックス群を考えると，$g_1^m = g_2^m$ であれば g_1 と g_2 の固定点は一致する。故に，g_1 と g_2 の軸は一致する。方程式から g_1 と g_2 の軸への作用する方向が一致するので結局 g_1 と g_2 が変換として一致することが分かる）。故に，$\gamma_{n_j} = \rho_{n_j}(\gamma_0)$ である。従って，

$$g = \lim_{j\to\infty} \gamma_{n_j} = \lim_{j\to\infty} \rho_{n_j}(\gamma_0) \in \Gamma$$

である。これは，任意の幾何学的収束部分列が Γ に収束することを示すので，結局，群の列 $\{\rho_n(\pi_1(S))\}_n$ が Γ に幾何的に収束することが分かる。 $\square$

2.2 幾何的方面への応用

幾何学的な面の応用としての定理の簡単な応用例として次がある。

Corollary 1. $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$ を三次元閉双曲多様体とし，S を N 内の圧縮不能かつ向き付け可能な閉曲面とする。もし N が *virtual* に S^1 上の曲面バンドルと同相でなければ，S の基本群に対応する Γ の部分群 Γ' は擬フックス群である。

ここで，３次元多様体 M 内の properly に埋め込まれた曲面 S が圧縮不能であるとは，次の３つの内どれか満たすときである：

1. S は球面であって球面を囲まない。
2. S は円板であって，$\partial S \subset \partial M$ は ∂M 内の自明でない閉曲線。
3. S は球面でも円板でも無く，包含写像 $i : S \hookrightarrow M$ は基本群の間の単射準同型を誘導する。

(大体の証明のあらまし). S を N 内に埋め込まれた閉曲面とする。N は既約なので S は球面ではない。また，N は閉双曲多様体なので $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と同型な部

分群を含まない。故に S はトーラスでもない。従って，S の圧縮不能性から Γ' は種数 2 以上の閉曲面と同型である。故に $N' = \mathbb{H}^3/\Gamma'$ は $S \times \mathbb{R}$ と同相であるが，被覆写像の定理 (Theorem 1.1) によれば，N' の両方の端は幾何学的有限である。故に Γ' は擬フックス群となる。 $\square$

同様の証明で次のことも分かる (少し議論が必要)。

Corollary 2. (市原氏のコメント) N を体積有限な双曲多様体とする。S を N 内の圧縮不能な曲面で次を満たすものとする：

> S 上の任意の非自明な単純閉曲線 α に対して，$i(\alpha)$ とホモトピックな N 内の閉測地線 α^* がとれる。ここで，$i : S \hookrightarrow N$ は包含写像。

このとき，もし N が *virtual* に S^1 上の曲面バンドルと同相でなければ，S の基本群に対応する部分群 $\Gamma' \subset \Gamma$ は擬フックス群である。

参考文献

[1] J.Anderson and D.Canary, Cores of hyperbolic 3-manifolds and limits of Kleinian groups, Amer. J. Math., **118** (1996), 745–779.

[2] J.Anderson and D.Canary, Cores of hyperbolic 3-manifolds and limits of Klenian groups II, J. London Math. Soc. **61** (2000),489–505.

[3] F.Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, Ann. of Math. **124** (1986), 71–158.

[4] D.Canary, A covering theorem for hyperbolic 3-manifolds and its applications, Topology **35** (1996), 751–778.

[5] K.Matsuzaki and M.Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford University Press (1998).

[6] A.Marden, The geometry of finitely generated Kleinian groups, Ann. of Math. **99** (1974), 383–462.

[7] W.Thurston, *The geometry and topology of* 3*-manifolds*, Lecture notes, Princeton University (1979).