私的３次元双曲幾何入門

宮地 秀樹 (大阪市立大学理学研究科)

２００３年３月７日 (金曜日, 双曲幾何の日)
『関西低次元トポロジー若手研究会』 (大阪大学)

目 次

1 導入

このノートは３次元双曲幾何に関することを私的にまとめたものです。証明は私が独自でつけたものも多いので、くれぐれもこのノートは自己責任の下においてご使用ください。しかし、もし読まれた場合になにか間違いを発見された場合には教えて頂けると非常に助かります。

また、最後の章では証明をほとんど与えていません。これはそれを説明するには準備がかなり必要になることと、筆者の怠慢からくるものです。証明を知りたい方は適当な教科書を御覧ください。

謝辞 このノートの初期のバージョンに対して大阪大学の秋吉宏尚さんには有益なコメントをいただきました。感謝致します。

2 私的３次元双曲幾何入門

2.1 双曲空間のモデル

$\mathbb{H}^3 = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}$ を３次元上半空間とする。３次元上半空間にリーマン計量

$$ds^2 = \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}$$

を入れることにより３次元双曲空間 (すなわち、定曲率 $\equiv -1$ の完備単連結リーマン多様体) のモデルとなる。明らかに $\mathbb{C} = \mathbb{C} \times \{0\} \subset \partial\mathbb{H}^3$ であるが、$\mathbb{C}$ の一点コンパクト化 $\hat{\mathbb{C}}$ $(\cong S^2)$ を考えることにより $\mathbb{H}^3$ のコンパクト化を与えられる。つまり $\overline{\mathbb{H}^3} = \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$。これは次のように理解すれば良い：$\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$ であることに注意する。$\mathbb{H}^3$ を S^3 の中で閉包を取ったものを $\overline{\mathbb{H}^3}$ とする。S^3 の中で $\mathbb{C} \subset \partial\mathbb{H}^3$ の閉包を取ると、$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$ であるので、上の同一視は自然である。

2.2 双曲距離

双曲計量を用いると、$\mathbb{H}^3$ 上に距離関数が定義することができ (その距離に関する幾何を双曲幾何と呼ぶのである)、その双曲距離関数は具体的に計算することができる。それを以下に見る。

Proposition 2.1. 2点 $p_1 = (z_1, t_1), p_2 = (z_2, t_2) \in \mathbb{H}^3$ に対して、これらの間の距離 $d(p_1, p_2)$ は

$$\tanh^2 \frac{d(p_1,p_2)}{2} = \frac{|z_1 - z_2|^2 + (t_1 - t_2)^2}{|z_1 - z_2|^2 + (t_1 + t_2)^2}$$

を満たす。特に $z_1 = z_2$ であれば $d(p_1, p_2) = |\log(t_1/t_2)|$ である。

(証明). この計算は例えば次のようにすることができる。等長変換 (2.5 章を参照せよ)

$$(z,t) \mapsto \left(\frac{z - z_1}{t_1}, \frac{t}{t_1}\right)$$

により、p_1 は $(0,1)$ に移るので、$p_1 = (0,1)$ の時に計算すれば十分である。簡単のために $p_2 = (a,s)$ としておく。ここで $a \neq 0$ の時には、等長変換

$$(z,t) \mapsto \left(\frac{|a|}{a}z, t\right)$$

を応用することにより $a \geq 0$ と仮定しても一般性を損なわない。すなわち、2点 $(0,1)$, (a,s) は $\mathbb{H}^3$ 内の部分平面

$$H := \{(x + iy, t) \in \mathbb{H}^3 \mid y = 0\}$$

に含まれているとしてよい。今、$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, $(0 \leq t \leq 1)$ を p_1, p_2 を結ぶ微分可能な曲線とすれば、その双曲計量における長さ $L(\gamma)$ は不等式

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2}}{\gamma_3(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2}}{\gamma_3(t)} dt \end{aligned}$$

を満たすので、距離を求めるときには H 内に含まれる曲線のみを考えて下限をとれば十分である。一方、この部分平面への双曲計量の制限は $ds^2 \mid_H = (dx^2 + dt^2)/t^2$ と一致するので、これは2次元双曲空間の上半空間モデルでの双曲計量と一致する。

上半空間モデル $\mathbb{H}^2 = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} w > 0\}$ において、二点 i, w の間の距離 $d_{\mathbb{H}^2}(i, w)$ は等式

$$\tanh \frac{d_{\mathbb{H}^2}(i,w)}{2} = \left|\frac{w - i}{w + i}\right|$$

を満たし、上の H と上半空間モデルの同一視において p_1 は i に、p_2 は $w = |a| + si$ に対応するので、以上より計算が終る。 $\square$

以下は 2.5 章の内容を認めて証明する。

Corollary 2.1. $\{g_n\}_n \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ と $p_0 \in \mathbb{H}^3$ についてもし、$g_n(p_0) \to z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ であれば、任意の $q \in \mathbb{H}^3$ について $g_n(q) \to z_0$ である。

(証明). 等長変換で共役をとることにより $z_0 = 0 \in \hat{\mathbb{C}}$ であると仮定して良い。仮定から $(z_n, t_n) := g_n(p_0) \to 0$ なので、任意の $\epsilon > 0$ について、ある $n_0 > 0$ が存在して $\sqrt{|z_n|^2 + t_n^2} < \epsilon$ である。

今、g_n は $\mathbb{H}^3$ の等長変換なので

$$d(g_n(p_0), g_n(q)) = d(p_0, q) =: D \quad (\text{定数})$$

となる。従って Proposition 2.1 より、$(w_n, s_n) = g_n(q)$ と書けば、

$$\left(\frac{|z_n - w_n|^2 + (t_n - s_n)^2}{|z_n - w_n|^2 + (t_n + s_n)^2}\right) = \tanh^2 \frac{D}{2}$$

つまり、

$$\left(|z_n - w_n|^2 + (t_n - s_n)^2\right) = 2\sinh^2(D/2) t_n s_n$$

である。今、$d(g_n(p_0), g_n(q)) = D$ なので Proposition 2.1 の最後のコメントにより、$s_n \le e^D t_n$ である。以上より、

$$\begin{aligned}\sqrt{|z_n - w_n|^2 + (t_n - s_n)^2} &\le \sqrt{2}\sinh(D/2)e^{D/2} t_n \\ &< \sqrt{2}\sinh(D/2)e^{D/2}\epsilon\end{aligned}$$

である。従って $(w_n, s_n) \to 0$ である。 □

2.3 測地線

上半空間モデルにおける測地線は、

- 縦線 $\{(z_0, t) \in \mathbb{H}^3 \mid t > 0\}$ 上の線分、もしくは
- $\mathbb{C}$ $(\subset \partial\mathbb{H})$ と２点で直交する円弧の部分弧、

のいずれかである。

これは次のように考えればよい (厳密な証明ではない)：$\mathbb{H}^3$ より任意の異なる２点 $\{p_i\}_{i=1}^2 = \{(z_i, t_i)\}_{i=1}^2$ を取る。これらを結ぶ測地線が上の２つのうちのいずれかであることを示せば良い[1]。そこで、次のように定義されるような２点を通る $\mathbb{H}^3$ 内の平面 H を考える：

(1) $z_1 \ne z_2$ の時は z_1 と z_2 を通る $\mathbb{C}$ 上の直線 L を考え、

$$H = \{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid z \in L\},$$

[1] リーマン幾何の一般論より２点を結ぶ測地線は唯一本であることが知られている。

(2) $z_1 = z_2$ のときは、

$$H = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 \mid \mathrm{Im}(z - z_1) = 0\}$$

とする。

(1) のとき $A = (z_2 - z_1)/|z_2 - z_1|$ として、写像

$$\mathbb{H}^2 \ni (u,v) \mapsto (Au, v) \in H \subset \mathbb{H}^3$$

は双曲上半平面 $\mathbb{H}^2$ から H への等長写像を与える。このことより、p_1, p_2 を通り $\mathbb{C}$ に直交する円弧の p_1 と p_2 の間の部分弧が測地線であることがわかる[2]。(2) の場合も同様である。

2.4 体積要素

双曲計量 ds^2 を与える行列は

$$G := \begin{pmatrix} 1/t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/t^2 \end{pmatrix}$$

なので体積要素は

$$dV = \sqrt{\det(G)}dxdydt = \frac{dxdydt}{t^3}$$

である。ただし、$z = x + iy$ としている。ここでは (可測) 集合 A についてその双曲計量に関する体積を $\mathrm{Vol}(A)$ と書く：

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A dV = \int_A \frac{dxdydt}{t^3}$$

である。球の体積は次のようになる。

Proposition 2.2. *$p \in \mathbb{H}^3$ 中心の (双曲計量に関する) 半径 r の $\mathbb{H}^3$ 内の球を $B(p,r)$ と書くとき、半径 r の (双曲的) 球の双曲計量に関する体積は*

$$\mathrm{Vol}(B(p,r)) = \pi(\sinh(2r) - 2r)$$

となる。

計算は上半空間モデルではなく、単位球モデル

$$\left(\{p \in \mathbb{R}^3 \mid |p| < 1\}, \frac{4|dp|^2}{(1-|p|^2)^2}\right)$$

において原点中心の球を考えると計算しやすい。

この公式に Euclid 幾何と双曲幾何との違いが出ている。実際、Euclid 幾何における半径 r の球の体積は $O(r^3)$ $(r \to \infty)$ であるが、上の公式から双曲幾何での半径 r の球の体積は $O(e^{2r})$ $(r \to \infty)$ となる。

[2] $\mathbb{H}^2$ の幾何についてはわかっていると仮定している。

2.5 等長変換

Proposition 2.3. 3次元双曲空間の上半空間モデル $(\mathbb{H}^3, ds^2)$ において、向きを保つ等長写像は次の3つの形の変換の有限個の合成で書ける。

- $E_\lambda : (z,t) \to (\lambda z, |\lambda| t)$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$,
- $T_a : (z,t) \to (z+a, t)$, $a \in \mathbb{C} - \{0\}$,
- $J : (z,t) \to \left(\frac{\overline{z}}{|z|^2+t^2}, \frac{t}{|z|^2+t^2} \right)$。

(証明). G を上の3つの形の元の有限回の合成で書けるものの全体とする。これは群になる。また、明らかに上の3つの元は向きを保つ等長変換であるので、G は向きを保つ等長変換群 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ に含まれる。

任意の $(w_0, s_0) \in \mathbb{H}^3$ について、$E_{s_0} \circ T_{w_0/s_0}(z,t) = (s_0 z + w_0, s_0 t) \in G$ なので、$E_{s_0} \circ T_{w_0/s_0}(0,1) = (w_0, s_0)$。これは、任意の二点が G の元で移りあうことを示す。故に $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ であることを示すには G の固定化群が $\mathrm{SO}(3)$ であることを示せばよい。

$a \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ について、

$$\begin{aligned} S(z,t) &:= T_{\lambda^2 a} \circ E_{\lambda^2(|a|^2+1)} \circ J \circ T_{-\overline{a}}(z,t) \\ &= \left(\frac{\lambda^2(|a|^2+1)(\overline{z}-a)}{|z-\overline{a}|^2+t^2} + \lambda^2 a, \frac{(|a|^2+1)t}{|z-\overline{a}|^2+t^2} \right) \end{aligned}$$

とすると、$S(0,1) = (0,1)$ であり、

$$S(z,0) = \left(\lambda^2 \frac{1+az}{z-\overline{a}}, 0 \right) =: (S_{\lambda,a}(z), 0)$$

である。今、$S_{\lambda,a}$ は球面距離 $d\rho = 2|dz|/(1+|z|^2)$ に関して等長的である。実際、

$$S^*_{\lambda,a}(d\rho) = \frac{2(1+|a|^2)}{|z-\overline{a}|^2 + |1+az|^2}|dz| = \frac{2(1+|a|^2)}{(1+|a|^2)(1+|z|^2)}|dz| = d\rho$$

である。また、$S_{\lambda,a} \circ S_{\lambda^{-1},a}(z) = \lambda^4 z$ かつ $S_{\lambda,a}(\infty) = \lambda^2 a$ なので、結局 G における $(0,1)$ の固定化群は球面距離の向きを保つ等長変換群と一致する。球面距離に関する向きを保つ等長変換群は $\mathrm{SO}(3)$ なので、欲しい主張を得る。 □

次に $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ と $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ との同型対応を見る。上に見たように $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の各元は $\overline{\mathbb{H}^3}$ に拡張される。また定義から E_λ, T_a, J それぞれの拡張の $\hat{\mathbb{C}}$ の制限は $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ に含まれる。従って、準同型写像

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \ni g \mapsto g\,|_{\hat{\mathbb{C}}} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

が定まる。この対応が全単射 (つまり同型) であることを示せばよい。今、上の準同型によって上の 3 元はそれぞれ、

$$\begin{array}{rcl} E_\lambda & \mapsto & \lambda z \\ T_a & \mapsto & z+a \\ J & \mapsto & 1/z \end{array}$$

であることに注意する。任意の $(az+b)/(cz+d) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ は、

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{-1}{c^2}\frac{1}{z+(d/c)} + \frac{a}{c} \tag{1}$$

と書けるので上の準同型の全射性はわかる。次に単射性を証明する。$g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ が $g|_{\hat{\mathbb{C}}}(z) = z$ $(\forall z \in \hat{\mathbb{C}})$ であるとする。$\infty, 0$、$-1, 1$ そして $-i, i$ をそれぞれ結ぶ測地線を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすると、g は等長変換であるので g は各 α_i を固定する。故に g は $\cap_{i=1}^3 \alpha_i = \{(0,1)\}$ を固定する。また、3 点 $\{\infty, 1, i\}$ を固定するので g は $(0,1)$ でのフレームを固定することがわかる。故に $g = id$ である。

式 (1) により $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ に対して、$g|_{\hat{\mathbb{C}}}(z) = (az+b)/(cz+d)$ $(ad-bc=1)$ とすれば、

$$\begin{array}{rcl} g(z,t) & = & T_{a/c} \circ E_{-1/c^2} \circ J \circ T_{d/c}(z,t) \\ & = & \left(\dfrac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\bar{c}t}{|cz+d|^2 + |c|^2t^2}, \dfrac{t}{|cz+d|^2+|c|^2t^2} \right) \end{array}$$

である。

2.6 等長変換の分類

$g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ を取る。g の $\hat{\mathbb{C}}$ への制限を同じ記号で書く。このとき $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の元のジョルダン標準形を考えると、g は次の 3 通りのうちのどれか一つに共役であることがわかる。

名称	標準型	トレース条件
楕円型 (elliptic)	$(z,t) \mapsto (e^{i\theta}z, t)$	$\mathrm{tr}^2(g) \in [0,4)$
放物型 (parabolic)	$(z,t) \mapsto (z+1, t)$	$\mathrm{tr}^2(g) = 4$
斜航型 (loxodromic)	$(z,t) \mapsto (\lambda z, |\lambda| t)$, $|\lambda| \neq 0, 1$	otherwise

2.7 双曲空間内の基本的集合

2.7.1 凸集合

$\mathbb{H}^3$ 内の集合 A が任意の A の 2 点を結ぶ測地線が A に含まれるとき**凸集合**であると言われる。自明な例として、測地線は明らかに凸集合である。凸集合の特別な場合として、次のような集合がある。

全測地的平面　$\hat{\mathbb{C}}$ 内の円 C をとる。C を境界にもつ $\mathbb{H}^3$ 内の ($\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内の部分集合として) 半球面 S を考える。これを $\mathbb{H}^3$ 内の (全測地的) **平面**という。これは凸集合である。実際、等長変換を作用させることにより $\infty \in C$ としてもよい。このとき $C \cap \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ 内の直線であり、B は ∞ と C の点を結ぶ測地線全体からなる縦方向の半平面である。Proposition 2.1 の証明から B の任意の２点を結ぶ測地線は B 内に含まれることがわかる。即ち、B は凸集合である。次の命題は良く使われる

Proposition 2.4. 任意の $\mathbb{H}^3$ 内の 3 点に対してそれらを含む全測地的平面が存在する。

(証明). 異なる $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{H}^3$ を取る。p_1 から p_2 を通る測地線を σ とする。等長変換 g で $g(\sigma) \subset \{(z,t) \mid z = 0\}$ と出来る。今、$g(p_3) = (z_3, t_3)$ とする。$z_3 \neq 0$ の時は $\{g(p_i)\}_{i=1}^3$ は全測地的平面

$$H' := \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 \mid z = sz_3,\ s \in \mathbb{R}\}$$

に含まれる。$z_3 = 0$ の時は

$$H' := \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$$

とすると良い。従って $H := g^{-1}(H')$ は 3 点 $\{p_i\}_{i=1}^3$ を含む全測地的平面である。 □

双曲的半空間　B を $\mathbb{H}^3$ 内の全測地的平面とする。上の定義から $\mathbb{H}^3 - B$ は２つの成分からなる。その成分を (双曲) **半空間**という。(双曲) **半空間**は凸集合である。実際、等長変換を施すことにより、B は $\{(z,t) \in \mathbb{H}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$ としてよい。このとき H を半空間とする。必要ならば $z \mapsto -z$ を施して、

$$H = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 \mid \mathrm{Im} z > 0\}$$

としてよい。このとき、$p_i = (z_i, t_i) \in H$ について $\mathrm{Im} z_i > 0$ であるので測地線の性質から p_1 と p_2 を結ぶ測地線 σ は帯

$$\{(z,t) \in \mathbb{H}^3 \mid z = (1-u)z_1 + uz_2,\ 0 \le u \le 1\}$$

に含まれる。これは２点を結ぶ測地線は H に含まれることを意味するので H は凸集合になる。

凸集合の基本的性質.　凸集合は次のような性質を持つ。

Proposition 2.5. $\mathbb{H}^3$ 内の閉集合 A が凸集合であるための必要十分条件は

$$A = \cap_H (\mathbb{H}^3 - H)$$

が成立することである。ここで上の交わりは $H \cap A = \emptyset$ であるような半空間 H 全体で取られるとする。

(証明). この証明の中では簡単のために $p, q \in \mathbb{H}^3$ を結ぶ測地線を $[p, q]$ と書く。定義から $A \subset \cap_H(\mathbb{H}^3 - H)$ は自明なので逆を示す。

$p \in \mathbb{H}^3 - A$ を取る。p 中心の (双曲的) 半径 r の開球を $B(p, r)$ と書く。A は閉集合なのである $R > 0$ で $B(p, R) \cap A = \emptyset$ かつ $\overline{B(p, R)} \cap A \neq \emptyset$ であるものが取れる。$q \in \overline{B(p, R)} \cap A$ を取る。q での $\partial B(p, R)$ の接平面を B' と書く。このとき H' によって張られる全測地的平面を B と書き $\mathbb{H}^3 - B$ の成分で p を含むものを H と書く。このとき、$H \cap A = \emptyset$ である。実際、$H \cap A \neq \emptyset$ であれば、$p' \in H \cap A$ に対して測地線 $[p, p']$ を考えると測地線の性質から $[p, p'] \cap B(p, R) \neq \emptyset$ となる。一方、A は凸集合としているので $[p, p'] \subset A$ つまり、$A \cap B(p, R) \neq \emptyset$ が成立する。これは矛盾である。 □

2.7.2 ホロボール

一点 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ について、それに接する $\mathbb{H}^3$ 内の球を z 中心の**ホロボール**[3]という。これは $z = \infty$ の時は z 中心のホロボールは $\{(z, t) \mid t > c\}$ の形をしている。明らかにホロボールは凸集合である。

これは双曲幾何における内在的幾何により次のようにも定義される：$p_0 \in \mathbb{H}^3$ について z と p_0 を結ぶ測地線を σ とする。σ は p_0 からの長さにより変数付けされているとする。つまり $\sigma(0) = p_0$, $\sigma(t) \to z$ $(t \to \infty)$ が成立するとする。このとき、

$$H = \{p \in \mathbb{H}^3 \mid \lim_{t \to \infty} (d(p, \sigma(t)) - t) \leq k\}$$

$(k \in \mathbb{R})$ で定義される集合は上により定義されたホロボールと一致する。

実際、$z = \infty$, $p_0 = (0, 1)$ とするとき $\sigma(t) = (0, e^t)$ である。このとき Proposition 2.1 により $(w, s) \in \mathbb{H}^3$ について、

$$\begin{aligned} d((w, s), \sigma(t)) - t &= \log \frac{\sqrt{|w|^2 + (e^t + s)^2} + \sqrt{|w|^2 + (e^t - s)^2}}{\sqrt{|w|^2 + (e^t + s)^2} - \sqrt{|w|^2 + (e^t - s)^2}} - t \\ &= \log \frac{\left(\sqrt{|w|^2 + (e^t + s)^2} + \sqrt{|w|^2 + (e^t - s)^2}\right)^2}{4e^t s} - t \\ &= \log \frac{\left(\sqrt{|w|^2 + (e^t + s)^2} + \sqrt{|w|^2 + (e^t - s)^2}\right)^2}{4e^{2t} s} \\ &= \log \frac{\left(\sqrt{e^{-2t}|w|^2 + (1 + e^{-t}s)^2} + \sqrt{e^{-2t}|w|^2 + (1 - e^{-t}s)^2}\right)^2}{4s} \\ &\to \log(1/s) \quad (t \to \infty) \end{aligned}$$

故に $(w, s) \in H$ のとき、$\log(1/s) \leq k$ つまり $s \geq e^{-k} > 0$ である。計算よ

[3] 適当な日本語訳を思い付かなかった。

り逆も成立するので、この定義により定義される集合は初めに定義したホロボールと一致する。

2.7.3　双曲的凸包

K を $\mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$ 内の閉集合とする。K の**双曲的凸包** $\mathrm{CH}(K)$ とは任意の K の２点を結ぶ測地線全体の和集合を含む最小の凸集合である。

Proposition 2.6. ２点 $p, q \in \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$ を結ぶ測地線を σ とし、B を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の閉円板とする。次のうち一方が成立するとする；

(1) $p, q \notin \mathrm{CH}(B)$,

(2) $p, q \in \hat{\mathbb{C}}$ かつ $p, q \notin B$。

このとき、$\sigma \cap \mathrm{CH}(B) = \emptyset$ である。

(証明). 両方の場合を同時に証明する。等長変換を用いることにより $B = \{(z, 0) \in \hat{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Im} z \geq 0\} \cup \{\infty\}$ としてよい。この場合

$$\mathrm{CH}(B) = \{(z, t) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathrm{Im} z \geq 0, \quad t \geq 0\} \cup \{\infty\}$$

である。$p = (w_1, s_1), q = (w_2, s_2)$ とする。仮定より $\mathrm{Im} w_1, \mathrm{Im} w_2 < 0$ である。σ は p と q を含むような半円の一部なので、それは帯

$$\{(z, t) \mid z = (1-u)w_1 + u w_2,\ 0 \leq u \leq 1,\ t \geq 0\}$$

に含まれるコンパクト集合である。今、$\mathbb{C} - B = \{\mathrm{Im} z < 0\}$ は Euclid 幾何において狭義凸集合なので、$\sigma \cap \mathrm{CH}(B) = \emptyset$ であることがわかる。 □

Proposition 2.7. K を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の閉集合とする。このとき $\mathrm{CH}(K) \cap \hat{\mathbb{C}} = K$ となる。

(証明). $\mathrm{CH}(K) \cap \hat{\mathbb{C}} \supset K$ は定義より自明である。一方、$z \in \hat{\mathbb{C}} - K$ について p 中心の閉円板 B で $K \cap B = \emptyset$ になるものをとる。このとき Proposition 2.6 より $\mathrm{CH}(B)$ は任意の $p, q \in K$ を結ぶ測地線と交わらない。今、$\mathbb{H}^3 - \mathrm{CH}(B)$ は K の２点を結ぶ測地線を含む凸集合なので、$\mathrm{CH}(K)$ の最小性より $\mathrm{CH}(K) \subset \mathbb{H}^3 - \mathrm{CH}(B)$ である。つまり、$\mathrm{CH}(B) \cap \mathrm{CH}(K) = \emptyset$ である。故に $z \notin \mathrm{CH}(K) \cap \hat{\mathbb{C}}$ が成立する。 □

次の観測はしばしば暗黙の内に用いられる。

Proposition 2.8. K を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の閉集合とする。K の球面距離に関する直径を $\mathrm{diam}_e(K)$ と書く。このとき、もし $\mathrm{diam}_e(K) \leq \pi/2$ であれば

$$d((0, 1), \mathrm{CH}(K)) \geq -\log(\tan(\mathrm{diam}_e(K)/2)$$

が成立する。逆に

$$\mathrm{diam}_e(K) \leq 4 \arctan e^{-d((0,1),\mathrm{CH}(K))}$$

が成立する。

(証明). SO(3) による回転で与えられる等長写像により (2.5 章の後半を参照のこと)、K の直径と点 $(0,1)$ は保たれるので、$0 \in K$ と仮定して良い。

リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の球面距離を d_e と書くと、$z \in \mathbb{C}$ について $d_e(0,z) = 2\arctan(|z|)$ である。ので、$0 \in K$ より

$$K \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \tan(\mathrm{diam}_e(K)/2)\} := B$$

である。従って Proposition 2.6 を応用すると $\mathrm{CH}(K) \subset \mathrm{CH}(B)$ がわかる。故に、$d((0,1),\mathrm{CH}(K)) \geq d((0,1),\mathrm{CH}(B))$ である。一方、$\mathrm{diam}_e(K) \geq \pi/2$ を仮定しているので B の半径 $\tan(\mathrm{diam}_e(K))/2)$ は $\tan(\pi/4) = 1$ 以下である。故に以上から、

$$\begin{aligned} d((0,1),\mathrm{CH}(K)) &\geq d((0,1),\mathrm{CH}(B)) \\ &= d((0,1),(0,\tan(\mathrm{diam}_e(K))/2)) \\ &= -\log(\tan(\mathrm{diam}_e(K))/2) \end{aligned}$$

である。

$d = d((0,1),\mathrm{CH}(K))$ とする。$z_1, z_2 \in K$ を任意の 2 点とする。等長変換を用いることにより $z_2 = -z_1$ としてよい。また必要ならば $1/z$ を作用させることにより $|z_1| \leq 1$ としてよい。このとき、σ を z_1 と z_2 を結ぶ測地線とすると $\sigma \subset \mathrm{CH}(K)$ なので $d((0,1),\sigma) \geq d$ である。正規化から $d((0,1),\sigma) = \log(1/|z_1|)$ である。故に $|z_1| \leq \exp(-d)$ である。今、$d_e(z_1,z_2) = 4\arctan(|z_1|)$ であるので、

$$d_e(z_1,z_2) \leq 4 \arctan e^{-d}$$

である。z_1, z_2 は任意の点であったので主張を得る。 □

上の Proposition(とその証明) の直接の応用は次である。

Corollary 2.2. $\{K_n\}_n$ を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の閉集合の列とする。このとき $\mathrm{diam}_e(K_n) \to 0$ であれば、$\{K_n\}_n$ 内の *(Chabauty* 位相に関して*)* 収束する任意の部分列 $\{K_{n_j}\}_j$ に対して列 $\{\mathrm{CH}(K_{n_j})\}_j$ は点 $\{z_\infty\} = \lim_{j\to\infty} K_{n_j} \in \hat{\mathbb{C}}$ に収束する。

2.7.4 理想三角形

リーマン球面上の 3 点の双曲的凸包を**理想三角形**という。理想三角形は与えられたの内の 2 点を結ぶ 3 つの測地線を 3 辺とするような全測地的な三角形である。実際、そのような集合 Δ は凸集合であるので 3 点の双曲的凸包を

含む。一方、双曲的凸包の定義より、$\partial\Delta$ は双曲的凸包に含まれる。Δ の任意の点は $\partial\Delta$ の 2 点を結ぶ測地線の上にあるので Δ は双曲的凸包に含まれることがわかる。

2.7.5 理想四面体

リーマン球面上の 4 点の双曲的凸包を**理想四面体**という。先の証明と同様にして、理想四角形は与えられたの内の 3 点の双曲的凸包を面とする凸四面体であることがわかる。

理想四面体に関する不変量. 理想四面体 Δ とその辺 e に対して上半平面 $z(e) = z(e : \Delta)$ を次のように定める：Δ の頂点をそれぞれ Δ と $\{z_i\}_{i=0}^{3}$ し、e は z_0 と z_1 を結ぶ辺とする。

今 Δ を $z_0 = \infty$ となるように等長変換で移しておく。∞ 中心のホロボール H を適当に高く取っておく。$\partial H - \{\infty\} = \{(z,s) \mid s = s_0\}$ が適当な $s_0 > 0$ に対して成り立つので $L(z_0) = \partial H - \{\infty\}$ には自然に $\mathbb{C}$ からの自然な Euclid 幾何の構造が入る。この Euclid 幾何において $\partial H \cap \Delta$ は三角形である。∞ を固定する等長変換前代は相似変換 $z \mapsto az + b$ 全体であるので、$L(z_0)$ は相似性の自由度を持ち定まる。今、必要ならば番号を付け替えることにより z_1, z_2, z_3 の順番に $\partial L(z_0)$ の向きに向きに従って並んでいるとしても良い。このとき、

$$z(e) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

と定義する。簡単な計算により e_i を z_0 と z_i を結ぶ辺とすると

$$z(e_1)z(e_2)z(e_3) = 1, \quad 1 - z(e_1) + z(e_1)z(e_2) = 0$$

が成立する。

3 私的クライン群入門 (前編)

3.1 クライン群の定義

位相空間 X に作用する群 G が**真性不連続に作用**するとは、任意のコンパクト集合 $K \subset X$ について

$$^{\#}\{g \in G \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\} < \infty$$

が成立するときにそう言われる。**クライン群**とは $\mathbb{H}^3$ に真性不連続に作用する $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の部分群である。$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の部分群 G がクライン群であることと、上の同型対応において G が $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の離散部分群であることは同値である。

これは次のようにを考えればよい：G をクライン群とする。上の同型対応において G が $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 内の離散部分群でないとすると、G 内の相異なる列 $\{g_n\}_n$ で $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 内で $g_n \to id$ なる列が取れる。しかし、上のように $\hat{\mathbb{C}}$ の 3 点とフレームの対応を見れば、このことは $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ 内で $g \to id$ を意味することが分かる。これは G の真性不連続性に反する。また、$\mathbb{H}^3$ 上のフレームバンドルの $\mathbb{H}^3$ 内のコンパクト集合に制限はコンパクトなので、逆も同様に証明される。

3.2 クライン群における基本的な不変集合

G をクライン群とする。$\mathbb{H}^3$ 内の一点の G による像の集積集合 $(\subset \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}})$ を G の**極限集合**といい $\Lambda(G)$ と書く。G は $\mathbb{H}^3$ に真性不連続に作用するので $\Lambda(G) \subset \hat{\mathbb{C}}$ である。

実際、ある p と $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ に対して $g_n(p) \to p_\infty \in \mathbb{H}^3$ とすれば、K を p_∞ を内点に持つコンパクト集合とするとき、十分大なる n_0 について $n \geq n_0$ であれば $g_n(p) \in K$ となる。このとき $K_0 := g_{n_0}^{-1}(K)$ に対して $p \in g_n^{-1} g_{n_0}(K_0) \cap K_0 \neq \emptyset$ $n \geq n_0$ となるので、G の真性不連続性に反する。

極限集合 $\Lambda(G)$ の $\hat{\mathbb{C}}$ での補集合を $\Omega(G)$ と書き、G の**不連続領域**という。

3.3 極限集合の基本的性質

以下に極限集合の基本的性質を並べておく。

Proposition 3.1. 極限集合の定義は $\mathbb{H}^3$ の点の取り方に依らない。

(証明). Corollary 2.1 より、$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の列によっての点の極限は $\mathbb{H}^3$ の取り方に依らないので主張を得る。 □

Corollary 3.1. G をクライン群とするとき、任意の $g \in G$ について $g(\Lambda(G)) = \Lambda(G)$ が成立する。

(証明). $p \in \mathbb{H}^3$ と $g \in G$ を固定する。$z \in \Lambda(G)$ と $\{g_n\}_n \subset G$ について $g_n(p) \to z$ と仮定する。このとき、列 $\{g g_n g^{-1}\}_n \subset G$ における $g(p)$ の像を考えると、$g g_n g^{-1}(g(p)) = g g_n(p) \to g(z)$ なので $g(z) \in \Lambda(G)$ である。以上より、$g(\Lambda(G)) \subset \Lambda(G)$ である。逆は g の変わりに g^{-1} を考えればよい。 □

Proposition 3.2. G をクライン群とする。$z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ と $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ について $g_n(z_0) \to w_0$ であれば $w_0 \in \Lambda(G)$ である。

(証明). $\{z_i\}_{i=1}^{4} \subset \hat{\mathbb{C}} - \{z_0\}$ を異なる 4 点とする。このとき $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ から部分列を取ることにより、5 点 $\{z_i\}_{i=0}^{4}$ の内少なくとも 3 点は同じ点に収束するとしてよい。実際、部分列を取ることにより $g_n(z_i) \to w_i$ $(i = 0, \cdots, 4)$ と

してよい。このとき、例えば $\{w_i\}_{i=0}^2$ が異なると仮定すると、Möbius 変換は３点の行き先で決まるので、列 $\{g_n\}_n$ はある Möbius 変換に収束する。これは G の離散性に反する。

今、少なくとも２つの $i_1, i_2 \in \{1,2,3,4\}$ について列 $\{g_n(z_{i_j})\}_{n=1}^\infty$ が w_0 に収束したとする。３点 z_0, z_{i_1}, z_{i_2} を頂点に持つ $\mathbb{H}^3$ 内の理想三角形を Δ とする。このとき仮定から $g_n(\Delta)$ の頂点は w_0 に収束ので、$p \in \Delta \subset \mathbb{H}^3$ について $g_n(p) \to w_0$ が成立する。つまり $w_0 \in \Lambda(G)$ である。

次に (適当に番号を替えるをことにより) 各 $i = 2,3,4$ に対して、$\{g_n(z_i)\}_{n=1}^\infty$ が点 $w_\infty \neq w_0$ に収束するとする。先の議論と Corollary 2.1 から $p \in \mathbb{H}^3$ に対して $g_n(p) \to w_\infty$ である。

２点 z_0 と z_2 を結ぶ $\mathbb{H}^3$ 内の測地線を σ と書く。また $\sigma_n = g_n(\sigma)$ とする。$g_n(z_0) \to w_0$, $g_n(z_2) \to w_\infty$ なので σ_n は w_0 と w_∞ を結ぶ測地線 σ_∞ に次の意味で収束する：任意の $p \in \sigma_\infty$ について p と σ_n との距離は 0 に収束する。

$p_\infty \in \sigma_\infty$ を固定する。$p_n \in \sigma_n$ を p_∞ と σ_n の距離を与える点とする。$q_n = g_n^{-1}(p_n) \in \sigma_0$ とする。このとき、$q_n \to z_0$ が成立する。実際、先の議論より $P \in \sigma_0$ について $g_n(P) \to w_\infty$ である。故に

$$d(P, q_n) = d(g_n(P), p_n) = d(g_n(P), p_\infty) + O(1) \to \infty$$

である。一方 $g_n(z_2) \to w_\infty$ なので (適当に部分列をとれば) q_n は P から z_0 を結ぶ (半) 測地線上 σ_0^+ にある。故に $q_n \to z_0$ である。

さて、適当に部分列をとり q_{n+1} は q_n と z_0 を結ぶ半測地線上にあるとして良い。$n \geq 1$ について $m(n) > n$ で $d(q_n, q_{m(n)}) \geq n$ なるものを固定する。このとき、$g_n g_{m(n)}^{-1}(p_\infty) \to w_0$ になる。実際、

$$\begin{aligned} d(g_n g_{m(n)}^{-1}(p_{m(n)}), p_\infty) &= d(g_n(q_{m(n)}), g_n(q_n)) + d(g_n(q_n), p_\infty) \\ &= d(q_{m(n)}, q_n) + d(p_n, p_\infty) \\ &\geq n + O(1) \to \infty \end{aligned}$$

であり、作り方より $g_n g_{m(n)}^{-1}(p_{m(n)})$ は p_n と $g_n(z_0)$ を結ぶ (半) 測地線上にあるので $g_n g_{m(n)}^{-1}(p_{m(n)}) \to w_0$ である。また、

$$d(g_n g_{m(n)}^{-1}(p_\infty), g_n g_{m(n)}^{-1}(p_{m(n)})) = d(p_\infty, p_{m(n)}) = O(1)$$

なので、Corollary 2.1 の証明の議論を応用すると $g_n g_{m(n)}^{-1}(p_\infty) \to w_0$ になることが分かる。従って以上より、$w_0 \in \Lambda(G)$ である。 □

Proposition 3.3. $\Lambda(G)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 内の G の作用で不変な閉集合の中で最小のものである。つまり、閉集合 $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ が任意の $g \in G$ について $g(K) \subset K$ を満たせば $\Lambda(G) \subset K$ である。

(証明). $\mathrm{CH}(K) \subset \mathbb{H}^3$ を K の双曲的凸包 (2.7.3 章参照) とする。K の G の作用による不変性から $g(\mathrm{CH}(K)) = \mathrm{CH}(K)$ である。故に $p \in \mathrm{CH}(K)$ についての G 軌道の集積点は K に含まれる。つまり $\Lambda(G) \subset K$ である。 □

Corollary 3.2. $\Lambda(G)$ は $p_0 \in \overline{\mathbb{H}^3}$ の G 軌道の集積点集合である。

(証明). $p \in \mathbb{H}^3$ であれば定義より明らかなので、$p \in \hat{\mathbb{C}}$ として考える。K' を p の G 軌道の集積点集合とする。このとき定義から K' は G で不変な閉集合である。故に Proposition 3.3 より $\Lambda(G) \subset K'$ である。一方、Proposition 3.2 より $K' \subset \Lambda(G)$ である。故に両者は一致する。 □

次は Proposition 3.3 の簡単な系である。

Corollary 3.3. クライン群 G は位数無限な元を含むとする。このとき次が成立する。

(1) G が斜航的元を含むとき、

$$\Lambda(G) = \overline{\{\mathrm{Fix}(g) \mid g \in G \ : \ \text{斜航的元}\}}.$$

(2) G が放物的元を含むとき、

$$\Lambda(G) = \overline{\{\mathrm{Fix}(g) \mid g \in G \ : \ \text{放物的元}\}}.$$

ここで、Fix(g) は g の固定点集合である。

3.4 不連続領域の基本的性質

一般には $\Omega(G)$ は可算個の（単連結でない）成分を持つ。また、G の極限集合が 3 点以上であれば、Schwarz の補題より $\Omega(G)$ は双曲的リーマン面 (の可算個の和) である。次の $\Omega(G)$ の性質は基本的である。

Proposition 3.4. 任意の $g \in G$ について $g(\Omega(G)) = \Omega(G)$ である。また、U を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の開集合で $g(U) \subset U$ が任意の $g \in G$ について成り立つものとすると、$U \subset \Omega(G)$ である。すなわち $\Omega(G)$ はそのような開集合の中で最大のものである。

(証明). Proposition 3.3 と Corollary 3.1 よりわかる。 □

Proposition 3.5. G は $\Omega(G)$ 上真性不連続に作用する。従って、商空間 $\Omega(G)/G$ は *(*分岐点をもつ*)* リーマン面の構造を持つ。

(証明). G が有限群であれば明らかに真性不連続に作用するので、G は無限群であると仮定して良い。

真性不連続に作用することを示すために次のことを示せば十分である。

> 任意の $z \in \Omega(G)$ についてある閉近傍 $U \subset \Omega(G)$ が存在して有限個の $g \in G$ を除いて $g(U) \cap U = \emptyset$ が成立する。

任意の $z \in \Omega(G)$ を取り固定する。このとき、ある $w \in \Omega(G)$ が存在して、$g(w) \neq z$ が任意の $g \in G$ に対して成立する。実際、$z \in \Omega(G)$ なので U を z の $\Omega(G)$ 内の閉近傍とすると、$g(z) \in U$ となる $g \in G$ は高々有限個しかないから、$w \in U - \cup_{g \in G} g(z)$ からとればよい。このとき $\Omega' = \Omega(G) - \cup_{g \in G}\{g(w)\}$ とすると、G は無限群なので Ω' は双曲的リーマン面である。

z の Ω' 内の閉近傍 U をとれば $g(U) \cap U \neq \emptyset$ となる g が高々有限個であることを示す。これが成り立たないと仮定すると、ある z を含む閉近傍 $K \subset \Omega'$(これは Ω' 内のコンパクト集合) 互いに異なる元 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ が存在して、$g_n(K) \cap K \neq \emptyset$ となる。今、Ω' の双曲距離 $d_{\Omega'}$ における K の 1 近傍を $\mathcal{N}_1(K)$ とする。$\hat{K}$ は Ω' 内のコンパクト集合であり、各 n について $g_n(\hat{K}) \cap \hat{K} \neq \emptyset$ である。いま、$q_n \in g_n(K) \cap K$ とする。K はコンパクトなので $q_n \to q_\infty \in K$ としてよい。このとき、$p_n = g_n^{-1}(q_\infty)$ とおくと、十分大なる n について、$d_{\Omega'}(q_n, q_\infty) < 1$ なので、

$$d_{\Omega(G)}(p_n, g_n^{-1}(q_\infty)) = d_{\Omega(G)}(q_n, q_\infty) < 1$$

となる。つまり、$g_n^{-1}(q_\infty) \in \hat{K}$ である。故に部分列をとって $g_n^{-1}(q_n) \to q'_\infty \in \hat{K}$ である。一方極限集合の定義より、$q'_\infty \in \Lambda(G)$ となるので、これにより $q'_\infty \in \Omega(G) \cap \Lambda(G)$ となり矛盾である。 □

3.5 初等的クライン群

クライン群 G が**初等的**であるとは $\Lambda(G)$ が有限集合であることである。それ以外のときクライン群は**非初等的**と呼ばれる。非初等的クライン群の極限集合は完全集合である。特にその場合は $\Lambda(G)$ は非可算集合である。初等的クライン群は分類は完全に与えられている。ここではねじれの無い初等的クライン群の分類をみる。

Proposition 3.6 (ねじれなしの初等的クライン群の分類). 捩れの無い初等的クライン群は次のいずれかである。

(1) 放物的元で生成される巡回群。

(2) ２つの放物的元で生成される階数 2 の可換群。

(3) 斜航的元で生成される巡回群。

この命題を見るためにいくつかの補題を与える。

Lemma 3.1. クライン群内の楕円的元の位数は有限である。

(証明). $g(z) = e^{2\pi i\theta} z$ をあるクライン群内の楕円的元とする。このとき g が生成する巡回群 $\{g^n\}_{n=1}^{\infty}$ も離散的である。いま、$\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ とすると、無理

数の良く知られている性質 (例えば連分数展開を考えれば良い) から、ある自然数の対の列 $\{(p_n, q_n)\}_{n=1}^{\infty}$ と正数 $C > 0$ が存在して、

$$|q_n\theta - p_n| \leq Cq_n^{-1}$$

が成立する。従って、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}|g^{q_n}(z) - z| &= |e^{2\pi i q_n\theta}z - z| = |e^{2\pi i q_n\theta} - 1||z| \\ &= |e^{2\pi i q_n\theta} - e^{2\pi i p_n}||z| = |e^{2\pi i(q_n\theta - p_n)} - 1||z| \\ &\leq 2\pi C q_n^{-1}|z|\end{aligned}$$

ここで $|e^{ix} - 1| \leq |x|$ を使った。これは $g^{q_n} \to id$ を示すので離散性に矛盾である。故に $\theta \in \mathbb{Q}$ である。つまり、g の位数は高々θ の分母であるような元である。 □

Lemma 3.2. G をクライン群とする。$g, h \in G - \{id\}$ をとる。さらに g は斜航的であるとする。このとき、もし g と h は固定点を共有すれば、h は斜航的もしくは楕円的であり、さらに g と h の固定点は一致する。

(証明). 仮定より、$g(z) = a^2z$ $(|a| > 1)$, $h(z) = b^2z + c$ としてよい。今 $c \neq 0$ であると仮定する。計算により $h_n(z) := g^{-n}hg^n(z) = b^2z + (c/a^{2n})$ であるので、$gh_ng^{-1}h_n^{-1}(z) = z + (1 - a^2)cb^{-1}a^{-2n}$ となる。故に $c \neq 0$ より $gh_ng^{-1}h_n^{-1} \neq id$ かつ $gh_ng^{-1}h_n^{-1} \to id$ $(n \to +\infty)$ となる。これは G の離散性に反する。従って $c = 0$ である。一方、$h \neq id$ としていたので $b^2 \neq 1$。従って h は斜航的もしくは楕円的であり、h の固定点は g のそれと一致する。 □

Lemma 3.3. G をクライン群とする。もし G が固定点を共有しない無限位数の 2 元 g, h を含めば G は非初等的である。

(証明). 無限位数の元の固定点は極限集合に含まれることに注意する。$g(\infty) = \infty$ と仮定する。g は無限位数なので、 $z \in \mathbb{C}$ について $g^n(z) \to \infty$ としてよい。仮定から h の固定点は $\mathbb{C}$ に含まれるので、列 $\{g^{-n}hg^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ を考えるとこれらはすべて無限位数の元からなり、それらの固定点集合は ∞ に収束する点列になる。従って G の極限集合は無限集合であるので、定義より G は非初等的である。 □

(Proposition 3.6 の証明のあらまし). G をねじれのない初等的クライン群とする。$g \in G - \{id\}$ をとる。初めに g は放物的であると仮定する。このとき、上の 2 つの補題から任意の恒等写像と異なる G の元はすべて g と固定点を共有する放物型元である。今、共役をとることにより G の任意の元が ∞ を固定すると仮定すると、G の任意の元は $z \mapsto z + c$ の形である。従ってこれは Euclid 平面上の剛体変換からなるねじれのない離散群なので G は (1) もしくは (2) の形になる ($\mathbb{C}/G$ は基本群が可換なリーマン面であることからもわかる)。

g が斜航的であるとする。G の任意の元は g と固定点を共有する斜航的元である。従って、共役を取ることにより G の任意の元は $\{0,\infty\}$ を固定しているとしてよい。任意の $h \in G$ について $h(z) = \lambda_h z$ とかく。G の離散性から、ある $g_0 \in G - \{id\}$ で $|\lambda_{g_0}|$ (> 1) が最小なものが取れる。ここで、$h, h' \in G$ について $|\lambda_h| = |\lambda_{h'}|$ であれば、$h'h^{-1}(z) = \lambda_{h'}\lambda_h^{-1} z$ なので、G がねじれのないことから $h = h'$ であることがわかることに注意する。

ここで、$|\lambda_g| > 1$ と仮定する。$|\lambda_g| \geq |\lambda_{g_0}|^n$ が成立するような最大の自然数を n_0 とする。いま、$|\lambda_g| > |\lambda_{g_0}|^{n_0}$ であれば、$gg_0^{-n_0}$ を考えると、

$$|\lambda_{gg_0^{-n_0}}| = |\lambda_g||\lambda_{g_0}|^{-n_0}$$

であるので n_0 の最大性から $1 < |\lambda_{gg_0^{-n_0}}| < |\lambda_{g_0}|$ である。これは $|\lambda_{g_0}|$ の最小性に反する。故に $G = \langle g_0 \rangle$ である。 □

4 私的３次元双曲多様体入門 (前編)

4.1 ３次元双曲多様体

M を３次元多様体とする。M 上の**双曲構造**とは、M 上のアトラス $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ であって、次を満たすものである。

(1) $\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{H}^3$,

(2) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ であれば $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ はある $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ を $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ に制限したものである。

条件 (2) により、$\mathbb{H}^3$ の Poincaré 計量を M 上に引き戻すことが出来、それにより M 上には定曲率 $\equiv -1$ の計量が定義できる。これを M 上の**双曲計量**という。M 上の双曲計量による距離が完備であるとき、その双曲構造は**完備**であるといわれる。G をクライン群として $N_G := \mathbb{H}^3/G$ とすると、N_G には $\mathbb{H}^3$ より自然に誘導される完備双曲構造が定まる。これについては逆も成立することも知られている。すなわち

Proposition 4.1. 完備双曲多様体はあるクライン群による商空間に等長的である。

この証明の議論自身は難しくないが、長いので証明は省略する。証明のアイデアは以下の通り：局所座標系を解析接続することにより、与えられた双曲多様体の普遍被覆空間から $\mathbb{H}^3$ からの局所等長写像を構成する。その写像が被覆写像になっていることを示すことで上の Proposition が示される。

4.2 凸核

N を双曲多様体とする。N 内のホモトピー同値な凸集合 (任意の２点とその２点を結ぶ任意の測地線を含む集合) の中で最小なものを $\mathrm{CC}(N)$ と書き N の**凸核**という。この集合は次のように作られる集合と同値である：クライン群 G を用いて $N = \mathbb{H}^3/G$ と書く。極限集合 $\Lambda(G)$ の双曲的凸包 $\mathrm{CH}(\Lambda(G))$ を考えるとき、それの商空間 $\mathrm{CC}(G) := \mathrm{CH}(\Lambda(G))/G$ とする。自然に $\mathrm{CC}(G) \subset N$ である。このとき次が成立する。

Proposition 4.2. 上の記号において $\mathrm{CC}(N) = \mathrm{CC}(G)$ が成立する。

(証明). $\tilde{C}$ を $\mathrm{CC}(N)$ の $\mathbb{H}^3$ へのリフトとする。$p, q \in \tilde{C}$ と $\tilde{\sigma}$ を p と q を結ぶ測地線とする。このとき $\sigma := \mathrm{proj}(\tilde{\sigma})$ は $\mathrm{proj}(p)$ と $\mathrm{proj}(q)$ を結ぶ N 内の測地線である。ここで $\mathrm{proj} : \mathbb{H}^3 \to N$ は普遍被覆写像である。今 $\mathrm{CC}(N)$ は凸集合であるので $\sigma \subset \mathrm{CC}(N)$ である。故に $\tilde{\sigma} \subset \tilde{C}$。従って、$\tilde{C}$ は凸集合である。今、$\mathrm{CH}(N)$ はホモトピー同値なので $p \in \tilde{C}$ と $g \in G$ について $g(p) \in \tilde{C}$ である。故に、$\Lambda(G) \subset \overline{\tilde{C}} \cap \hat{\mathbb{C}}$ である。双曲的凸包の定義から $\tilde{C} \subset \mathrm{CH}(\Lambda(G))$ である。故に $\mathrm{CH}(G) \subset \mathrm{CH}(N)$ である。一方、$\mathrm{CH}(N)$ の最小性から $\mathrm{CH}(N) \subset \mathrm{CH}(G)$ である。 $\square$

4.3 Margulis の補題

次の定理は Margulis の補題と呼ばれる。

Theorem 4.1 (Margulis の補題). 次が成立するような普遍定数 ϵ_0 が存在する：任意のクライン群 G と任意の点 $p \in \mathbb{H}^3$ と任意の $\epsilon < \epsilon_0$ に対して、$\{g \in G \mid d(p, g(p)) < \epsilon\}$ で生成される群は初等的である。

Margulis の補題は例えば Jørgensen の不等式を用いると証明ができる。ここでは詳細を述べないが、興味のある方は例えば、[5] 等の標準的教科書を見て頂きたい。

Margulis の補題の応用例として次にあげる双曲多様体の ϵ-太部-細部分解は、今日の双曲多様体の研究はこの定理の下[4]にあると言っても良いぐらい非常に重要な結果である。

Theorem 4.2 (ϵ-太部-細部分解定理). 次をみたす普遍定数 $\epsilon_0 > 0$ が存在する：任意の正数 $\epsilon < \epsilon_0$ と任意の双曲多様体 N について、N の **ϵ-細部**

$$N_{<\epsilon} := \{p \in N \mid \exists\gamma \ : \ p \text{ を通る閉曲線 } s.t.\ \mathrm{length}_N(\gamma) < \epsilon\}$$

の成分は次の３つのうちのいずれかに等長的である。

(1) $\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid t > c_0\}/\langle z \mapsto z + 1\rangle$,

[4] 勿論、私的見解。

(2) $\{(z,t) \in \mathbb{H}^3 \mid t > c_0\}/\langle z \mapsto z+1, z \mapsto z+\tau \rangle$, $(\tau \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\tau \geq 1/2)$

(3) $\{(z,t) \in \mathbb{H}^3 \mid |z| < k_0 t\}/\langle z \to \lambda z \rangle$,

ここで、上の定数について $c_0 = c_0(\epsilon)$、$k_0 = k_0(\lambda, \epsilon) > 0$ である。

(1) と (2) のタイプの ϵ-細部の成分ををそれぞれ**階数 1，2 のカスプ部分** (cuspidal part of rank 1 or 2)、(3) のタイプの細部の成分を**マルグリストーラス** (Margulis tube) という。(1) と (2) の成分のみからなる ϵ-細部の部分集合を N の **ϵ-カスプ部分** (ϵ-cuspidal part of N) という。また、(3) の場合において群 $\langle z \to \lambda z \rangle$ の軸に対応するトーラスの内部の閉測地線をマルグリストーラスの**核測地線** (core geodesic) という。$N_\epsilon^0 = N - N_{<\epsilon}^0$ と書く。

Theorem 4.2 は Margulis の補題を認めると Proposition 3.6 から簡単に従う。実際には次のように考えればよい。

Theorem 4.2 の大体の証明のあらまし． $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$ とする。N は多様体なので Γ はねじれがないクライン群である。ϵ_0 を $x \in N_{<\epsilon}$ をとり、$p \in \mathbb{H}^3$ を x のリフトとする。このとき、Margulis の補題から $\{g \in G \mid d(p, g(p)) < \epsilon\}$ で生成される群 G_p は初等的である。G_p はねじれなしなので、G_p は Proposition 3.6 の 3 つの群のいずれかに同型である。このことから、主張が導かれる。 □

次のことも知られている。

Proposition 4.3. Γ を非初等的クライン群として、$N = \mathbb{H}^3/\Gamma$ とする。このとき、次を満たすような普遍定数 $c > 0$ が存在する：$\epsilon < \epsilon_0$ に対して、T を $N_{<\epsilon}$ の成分であるマルグリストーラスとするとき、任意の $p \in T$ について、

$$d_N(p, N - N_{<\epsilon_0}) \geq \frac{1}{2}\log(\epsilon_0/\epsilon) - c_0$$

が成立する。特に $\epsilon \to 0$ とすれば、$d_N(p, N - N_{<\epsilon_0}) \to \infty$ である。

5 体積有限な双曲多様体の基本的性質

この章では今までの章より得られた結果を用いて、体積が有限である双曲多様体の基本的性質について述べる。

初めに体積有限な商多様体を持つクライン群の極限集合の性質を述べる。

Proposition 5.1. G をクライン群とする。もし $\mathbb{H}^3/G$ の体積が有限であれば、$\Omega(G) = \emptyset$ である。従って同じことであるが $\Lambda(G) = \hat{\mathbb{C}}$ である。

(証明). $\Omega(G) \neq \emptyset$ とする。G は $\Omega(G)$ 上に真性不連続に作用するのである円板 $B \subset \Omega(G)$ で $g(B) \cap B = \emptyset$ $(\forall g \in G - \{id\})$ と出来る。故に、B の凸包 $\hat{B}$ を考えると $g(\hat{B}) \cap \hat{B} = \emptyset$ $(\forall g \in G - \{id\})$ となる。これは射影 $\mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3/G$ により $\hat{B}$ が $\mathbb{H}^3/G$ に単射等長に埋め込まれることを意味する。今 $\hat{B}$ の体積は無限であるから、これは $\mathbb{H}^3/G$ の体積有限性に矛盾する。 □

この命題の逆は成立しない。つまり $\Lambda(G) = \hat{\mathbb{C}}$ であっても体積が無限であることもある。

次に体積有限な双曲多様体の位相的性質を与える。いま、明らかに階数 1 のカスプ部分の体積は無限であるので、体積有限の双曲多様体の ϵ-細部の成分はは階数 2 のカスプ部分、もしくはマルグリストーラスである。簡単な計算から、$N_{<\epsilon}$ の階数 2 のカスプ部分の体積は ϵ のみに依存する定数で下から抑えられる。これらより次の補題を得る。

Lemma 5.1. 体積有限の双曲多様体の ϵ-カスプ部分は有限個の階数 2 のカスプ部分の和である。

Proposition 5.2. G をねじれのないクライン群とする。もし、$N_G := \mathbb{H}^3/G$ の体積が有限ならば、N_G はあるコンパクト多様体の内部と同相である。特に、G は有限表示群である。

(証明). ϵ_0 を Margulis 定数とし、$N^0_{<\epsilon}$ を N_G の ϵ-カスプ部分 $(\epsilon < \epsilon_0)$ とする。

ここで簡単のために $M := N_G - N^0_{<\epsilon}$ とすると、N_G は M の内部と同相なので、M がコンパクトであることを示せばよい。そのために M の直径が有限であることを示す。必要ならば ϵ を適当に小さくしておいて $N^0_{<\epsilon}$ の任意の２つの成分は少なくとも距離 2 以上であると仮定してもよい。

$x_0 \in M$ を固定する。M の直径が無限であると仮定する。このとき $\{x_n\}_n$, $x_n \in M$ で $d(x_0, x_n) \to \infty$ であるものが取れる。いま、必要ならば部分列を取ることにより、$d(x_n, x_m) \geq 2$ であると仮定してよい。

各 n について次のいずれか一方が成立する。

(1) $B(x_n, 1) \cap N^0_{<\epsilon} = \emptyset$

(2) $B(x_n, 1) \cap N^0_{<\epsilon} \neq \emptyset$

ここで、N_G の体積有限性と Lemma 5.1 より、$N^0_{<\epsilon}$ は有限個の成分の和よりなる。従って、特に (2) のタイプの列が無限個存在すれば、ある $N^0_{<\epsilon}$ の成分 C が存在して $B(x_n, 1) \cap \partial C \neq \emptyset$ が無限個の n について成立する。しかし一方で、∂C はコンパクトであるので、仮定に矛盾する。故に、与えられた列は (1) のタイプの x_n のみからなるとして良い。さて、x_n での N_G の単射半径を r_n と書く。

もし、ある $a > 0$ に対して $r_n > a$ が無限個の n について成立するとすると、族 $\{B(x_n, \min\{1, a\})\}_n$ はある一定の半径を持つ、互いに交わらない無限個の球の族を含むので、N_G の体積有限性に反する。従って、$r_n \to 0$ である。

いま、ϵ-太部-細部分解の定理から、十分大きな n_0 が存在して、各 $n \geq n_0$ に対して ϵ-マルグリストーラス C_n が存在して $B(x_n, 1) \cap C_n \neq \emptyset$ である。今、$\{C_n\}_n$ が有限個のマルグリストーラスからなるとすると、$\{x_n\}_n$ は無限列なので、どれか一つのマルグリストーラスに無限個の $\{x_n\}_n$ 内の点が入る

ことになる。一方、マルグリストーラス自身はコンパクトなので、これは x_n での単射半径が 0 に収束することが出来ないことになり、今の我々の仮定に反する。従って $\{C_n\}_n$ は無限個のマルグリストーラスからなる。

いま Proposition 4.3 により、必要ならは ϵ を小さく取って、$d(C_n, C_m) \geq 2$ として良いので、各 C_n は互いに異なるとしてよい。このとき、$p_n \in \partial C_n$ をとると、定義 p_n での単射半径は ϵ 以上であるので、球の族、$\{B(p_n, \min\{1, \epsilon\})\}_n$ を考えると、これは互いに交わらない無限個の半径が一定の球からなる。しかしこれは、N_G の体積有限性に反する。

以上より、M は直径有限であることがわかったので特に、M はコンパクトになる。 □

6 私的クライン群入門 (後編)

この章では有限生成クライン群を考える。また議論を簡単にするため、この章ではクライン群と言えばねじれの無いものばかりを考える。

6.1 有限生成クライン群の基本的性質

有限生成クライン群に関しては、次の Ahlfors の有限性定理と P.Scott の定理から来る系は基本的である。

Theorem 6.1 (Ahlfors の有限性定理). G を有限生成クライン群とすると、$\Omega(G)/G$ は解析的有限型のリーマン面の有限個の和である。

ここで、解析的有限型のリーマン面とは閉リーマン面から高々有限個の穴をのぞいた面である。Ahlfors の有限性定理の証明には沢山の準備を必要とするので、証明の説明は省略するが、その準備をするのを無視して証明のアイデアだけを述べると次のようになる：

クライン群が有限生成の場合、その変形は生成元を動かすことにより達成されるので、その変形空間は有限次元である（メビウス変換の空間 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ は 3 次元であるので、生成元の個数を n とすると変形空間の空間は高々$3n$ 次元である。）。面 $\Omega(G)/G$ の (擬等角) 変形を用いてクライン群の変形をすることにより、$\Omega(G)/G$ のタイヒミュラー空間から G の変形空間への局所単射正則写像が定義される。このことと変形空間の有限次元性から、$\Omega(G)/G$ のタイヒミュラー空間の有限次元性がわかる。タイヒミュラー空間の有限次元性から $\Omega(G)/G$ の各成分が解析的有限なリーマン面であることがわかる。

(注) 実は、$(0, 3)$ 型のリーマン面のタイヒミュラー空間の次元は 0 次元なので、上の議論だけでは $\Omega(G)/G$ 内に $(0, 3)$ 型の面であるような成分は無限個あっても矛盾は起きない（これが Ahlfors の誤りであった。ちなみに $(0, 3)$ 型以外の面のタイヒミュラー空間の次元は 1 以上あるのでそれらの成分は高々有

限個しかないことはこの議論からわかる)。このギャップは、この後に Bers が $(0,3)$ 型のリーマン面の成分が有限個であることを示すことにより克服した。

Theorem 6.2 (P.Scott). 既約３次元多様体の基本群が有限生成であれば有限表示である。

Corollary 6.1. 有限生成クライン群は有限表示群である。

6.2　いろいろなクライン群

有限生成クライン群 G が**擬フックス群**であるとは $\Lambda(G)$ が閉曲線であるときである。このとき $\mathbb{H}^3/G$ はある曲面 S と $\mathbb{R}$ の直積と同型である。

クライン群の簡単な例は次のように定義されるような群である。一般に以下のような群は**ショットキー群**と呼ばれる：$\{D_i^{\pm}\}_{i=1}^{n}$ を互いに交わらない $\hat{\mathbb{C}}$ 内の閉円板とする。これらに対して $g_i \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ で $g_i(\partial D_i^+) = \partial D_i^-$, $g_i(\mathrm{Int}(D_i^+)) \cap \mathrm{Int}(D_i^-) = \emptyset$ になっているものが存在すると仮定する。このとき、群 $G = \langle g_1, \cdots, g_n \rangle$ は離散的になる。$\mathbb{H}^3/G$ は種数 n のハンドル体の内部と同相である。

6.3　クライン群の表現について

G を群とする。群の準同型の列 $\rho_n : G \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ が ρ_∞ に**代数的に収束**するとは、任意の $g \in G$ について $\rho_n(g) \to \rho_\infty(g)$ が成立するときにそういわれる。G が有限生成のときは G の生成元の像が収束することと代数的に収束することは同値である。クライン群の列 G_n が G_∞ に**幾何学的に収束**するとは、次の２つが成立するときである。

(1) $g_{n_j} \in G_{n_j}$ について $g_{n_j} \to g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ であれば $g \in G$ である。

(2) 任意の $g \in G$ についてある部分列 $g_{n_j} \in G_{n_j}$ で $g_{n_j} \to g$ になるものが存在する。

代数的に収束する群 G の表現の列 $\{\rho_n\}_n$ が表現 ρ_∞ に**強収束**するとは群の列 $\{\rho_n(G)\}_n$ が群 $\rho_\infty(G)$ に幾何学的に収束するときにそう言われる。

7　私的３次元双曲多様体入門 (後編)

7.1　幾何学的有限と幾何学的無限

N を双曲多様体とする。G をクライン群で $N = \mathbb{H}^3/G$ となるものとする。今、G を有限生成と仮定する。$N_\epsilon := N - N^0_{<\epsilon}$ とする。N_ϵ の (相対位相に関する) 連結開集合の列 $\{U_i\}_{i\in I}$ で次を満たすものを考える；

(1) 各 U_i 対して $\partial U_i - \partial N_\epsilon$ はコンパクトである。しかし、U_i 自身はコンパクトでない。

(2) 任意の $i, j \in I$ に対してある $k \in I$ で $U_k \subset U_i \cap U_j$ であるものが存在する。

(3) $\{U_i\}_{i \in I}$ は上の 2 つの性質を満たすもので最大である。

N の**端**とは上の性質を満たすような集合の列 $\{U_i\}_{i=1}$ のことである。この端全体を用いて N_ϵ をコンパクト化することが出来る (Freudenthal のコンパクト化と呼ばれる。例えば [3] の §1.2 を参照のこと)。$e = \{U_i\}_{i \in I}$ を N_ϵ の端とするとき各 U_i は e の近傍と呼ばれる。

N の端 e が**幾何学的有限**であるとは任意の閉測地線と交わらないような e の近傍が取れるときにそう言われる。そうでないとき e は**幾何学的無限**であるという。全ての端が幾何学的有限のときクライン群 G は**幾何学的有限**と言われる。そうでないとき**幾何学的無限**であると言う。

McCullough の相対核定理によれば N_ϵ 内のコンパクト多様体 C で次の性質を満たすものが取れる：

> $P := C \cap \partial N_\epsilon$ の各成分 P' は $N^0_{<\epsilon}$ のある成分 C の境界上の円環もしくはトーラスと同相であるコンパクトな曲面で、P' は ∂C とホモトピー同値なものである。また、N_ϵ の各成分には唯一つそのような P の成分 P' の対応している。

このとき $N_\epsilon - C$ の各成分は N の端に対応する。

参考文献

[1] J.Anderson and D.Canary, Cores of hyperbolic 3-manifolds and limits of Kleinian groups, Amer. J. Math., **118** (1996), 745–779.

[2] J.Anderson and D.Canary, Cores of hyperbolic 3-manifolds and limits of Klenian groups II, J. London Math. Soc. **61** (2000),489–505.

[3] F.Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, Ann. of Math. **124** (1986), 71–158.

[4] D.Canary, A covering theorem for hyperbolic 3-manifolds and its applications, Topology **35** (1996), 751–778.

[5] K.Matsuzaki and M.Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford University Press (1998).

[6] A.Marden, The geometry of finitely generated Kleinian groups, Ann. of Math. **99** (1974), 383–462.

[7] W.Thurston, *The geometry and topology of* 3*-manifolds*, Lecture notes, Princeton University (1979).