# How to use the Reidemeister torsion

Teruhisa Kadokami
Osaka City University Advanced Mathematical Institute
kadokami@sci.osaka-cu.ac.jp

January 30, 2004 (Fri)

**Abstract**

Firstly, we give the definition of the Reidemeister torsion, and explain basic properties, following V. G. Turaev [22], [23], [24]. Secondly, we consider the Reidemeister torsion of a homology lens space, which is the result of $p/q$-surgery along a knot $K$ in a homology 3-sphere $\Sigma$. We denote the homology lens space by $\Sigma(K;p/q)$. Main Theorem 1 is the case that $K$ is a torus knot in $S^3$. Main Theorem 2 is the case that the Alexander polynomial of $K$, $\varDelta_K(t)$, is degree 2. We judge when the homology lens spaces are homeomorphic to lens spaces by using the Reidemeister torsion.

**Statement of Main Theorems**

Some terms will be explained later. We state our two main theorems.

**Theorem** (Moser [14]; Gordon [8]; Shimozawa [21]) *Let $K_{r,s}$ be the $(r,s)$-torus knot in $S^3$, and $M = S^3(K_{r,s};p/q)$ the result of $p/q$-surgery along $K_{r,s}$ where $|p|, |r|, |s| \geq 2$ and $q \neq 0$. Then there are three cases :*

(1) *If $|p-qrs| \neq 0$, then $M$ is a Seifert fibered space with three singular fibers of multiplicities $|r|, |s|$ and $|p-qrs|$. In particular,*

(2) *if $|p-qrs| = 1$, then $M$ is the lens space $L(p, qr^2)$* (Figure 1).

(3) *If $|p-qrs| = 0$ $(p/q = rs)$, then $M$ is the connected sum of two lens spaces, $L(r,s)\sharp L(s,r)$.*

We denote that

$$\varDelta_{r,s}(t) := \frac{(t^{rs}-1)(t-1)}{(t^r-1)(t^s-1)} \qquad ((r,s)=1),$$

where $(r, s)$ is the greatest common divisor of $r$ and $s$. $(r, s) = 1$ means that $r$ and $s$ are coprime integers.

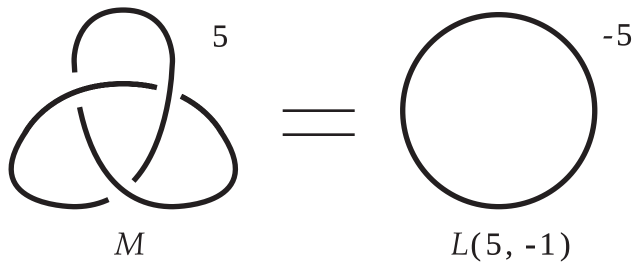


Figure 1: the result of surgery is a lens space

**Main Theorem 1** *Let $K_{r,s}$ $((r, s) = 1)$ be a knot in a homology 3-sphere $\Sigma$ with its Alexander polynomial $\Delta_{r,s}(t)$, and $M = \Sigma(K_{r,s}; p/q)$ the result of $p/q$-surgery along $K_{r,s}$ where $|p|, |r|, |s| \geq 2$ and $q \neq 0$. Then $M$ is of lens space type if and only if the following (1) and (2) holds.*

(1) $(p, r) = 1,\ (p, s) = 1,$

(2) (i) $qrs \equiv \pm 1 \pmod{p}$, *or*
(ii) $r \equiv \pm 1 \pmod{p}$ *or* $s \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

**Theorem** (Goda-Teragaito [7]) *Let $K$ be a genus 1 knot in $S^3$. If a rational surgery along $K$ yields a lens space, then $K$ is the trefoil.*

We denote that

$$\Delta_n(t) := n(t-1)^2 + t = nt^2 - (2n-1)t + n \quad (n \neq 0).$$

**Main Theorem 2** *Let $K$ be a knot in a homology 3-sphere $\Sigma$ with its Alexander polynomial $\Delta_K(t) = \Delta_n(t)$, and $M = \Sigma(K; p/q)$ the result of $p/q$-surgery along $K$ where $|p| \geq 2$ and $q \neq 0$. Let $\xi_d$ be a primitive $d$-th root of unity, $\psi_d : \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t^p - 1) \to \mathbf{Q}(\xi_d)$ a homomorphism such that $\psi_d(t) = \xi_d$ where $d\ (\geq 2)$ is a divisor of $p$, and $\tau^{\psi_d}(M)$ the Reidemeister torsion associated to $\psi_d$. Then the following (1) and (2) holds.*

(1) *If $n \leq -1$, then $\tau^{\psi_p}(M)$ is not of lens space type.*

(2) *If $|n| \geq 2$ and $d$ is a prime number, then $\tau^{\psi_d}(M)$ is of lens space type.*

The result leads to the following corollary.

**Corollary** *Let $K$ be a knot in a homology 3-sphere $\Sigma$ with its Alexander polynomial $\Delta_K(t) = \Delta_n(t)$, and $M = \Sigma(K; p/q)$ the result of $p/q$-surgery along $K$ where $|p| \geq 2$ and $q \neq 0$. If $M$ is of lens space type, then*

$$\Delta_K(t) = t^2 - t + 1 \quad (n = 1).$$

Applications and generalizations of the theorems will be explained in the talk.

## Contents

## Terminology

• **Reidemeister torsion** $(\tau(\mathbf{C}_*), \tau^{\varphi}(\mathbf{C}_*), \tau(X), \tau^{\varphi}(X))$：ある環 $R$ 上 finitely generated free chain complex $\mathbf{C}_*$ から決まる invariant のことをいう．記号で $\tau(\mathbf{C}_*)$ と表す．値は $R$ の商体の元である．実際に値が計算できるように様々な制限を付ける．環 $R$ は integral domain である方が扱い易い．環 $R$ から計算しにくいときは、環準同型 $\varphi : R \to R'$ に付随した invariant $\tau^{\varphi}(\mathbf{C}_*)$ を計算するのがよい．本講演の肝となるテクニックである．ここで、$R'$ は invariant が計算し易い環である．この値も Reidemeister torsion という．

空間の Reidemeister torsion は、finite CW-complex $X$ に対して定義される．$X$ の cell decomposition からの自然な chain complex が存在する．それから Reidemeister torsion を計算するのもいいが、そうではなくて、$X$ の適当な covering space $\tilde{X}$ の cell decomposition からの自然な chain complex の Reidemeister torsion を計算する．本講演では $\tilde{X}$ としては、maximal abelian covering を取ってくる．$H = H_1(X; \mathbf{Z})$ が covering transformation group になり、$\tilde{X}$ からの chain complex $\mathbf{C}_*(\tilde{X})$ にも $H$ の元が作用し、$\mathbf{Z}[H]$-chain complex と見なせる．この Reidemeister torsion を $X$ の Reidemeister torsion として、$\tau(X)$ と表す．実際は環準同型 $\varphi : \mathbf{Z}[H] \to R$ に付随した $\tau^{\varphi}(X)$ にしないと意味のある値が出てきにくい．そして、この invariant には自由度がある．$\pm\varphi(H)$ の元の倍数は同じ値と見なす．Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ には $\pm t^n$ 倍の自由度があるのと同じ理由である．本講演では、さらに "隠れた自由度" があることを指摘し、追求していく．

• **Homology lens space** $(M = \Sigma(K; p/q))$：向き付け可能閉 3 次元多様体 $M$ が *homology lens space* であるとは、$H_1(M; \mathbf{Z})$ が有限巡回群 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ のときをいう．本講演では $p \geq 2,\ p \neq \infty$ を仮定する．

任意の homology lens space $M$ は、適当な homology 3-sphere $\Sigma$ 内の適当な knot $K$ に沿った適当な $p/q$-surgery の結果として表すことができる．ここで、$|p| \geq 2, q \neq 0$. 記号で $M = \Sigma(K; p/q)$ と表す．

• **Lens space type**：Lens space $L(p, q)$ の 1 次元ホモロジー群の生成元を $t$ とする．つまり、$H = H_1(L(p, q); \mathbf{Z}) = \langle t \rangle = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. $\xi_d$ を 1 の原始 $d$ 乗根とする．ここで、$d\ (\geq 2)$ は $p$ の約数．準同型 $\psi_d : \mathbf{Z}[H] \to \mathbf{Q}(\xi_d)$ を $\psi_d(t) = \xi_d$ から決まるものとする．このとき、$\tau^{\psi_d}(L(p, q)) = (\xi_d - 1)^{-1}(\xi_d^{\bar{q}} - 1)^{-1}$ である．ここで、$q\bar{q} \equiv 1 \pmod{p}$.

$\zeta$ を 1 の原始 $n$ 乗根とするとき、第 $n$ 次円分体 $\mathbf{Q}(\zeta)$ の元 $a$ が *lens space type* であるとは、$a = \pm\zeta^m(\zeta^i - 1)^{-1}(\zeta^j - 1)^{-1}$ $((i, n) = 1,\ (j, n) = 1)$ と表されるときをいう．$a$ はある lens space の Reidemeister torsion の値になる．

Homology lens space $M = \Sigma(K; p/q)$ の 1 次元ホモロジー群の生成元を

$t$ とする．つまり、$H = H_1(M; \mathbf{Z}) = \langle t \rangle = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. $\xi_d$ を 1 の原始 $d$ 乗根とする．ここで、$d$ $(\geq 2)$ は $p$ の約数．準同型 $\psi_d : \mathbf{Z}[H] \to \mathbf{Q}(\xi_d)$ を $\psi_d(t) = \xi_d$ から決まるものとする．このとき、いかなる $d$ に対しても $\tau^{\psi_d}(M)$ が lens space type であるとき、$M$ そのものを *lens space type* という．もはや Reidemeister torsion では lens space との差を判断することができない多様体ということである．

• 代数的数のノルム $(N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha))$ : $K/\mathbf{Q}$ を $\mathbf{Q}$ 上の有限次 Galois 拡大とする．$K$ の元 $\alpha$ の $\mathbf{Q}$ 上のノルム $N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha)$ を以下のように定義する．

$$N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}\,(K/\mathbf{Q})} \sigma(\alpha).$$

ここで、$\mathrm{Gal}\,(K/\mathbf{Q})$ は Galois 拡大 $K/\mathbf{Q}$ の Galois 群とする．$\alpha$ の最小多項式を monic にしたときの定数項のベキ乗の $\pm 1$ 倍になっている．

# References


[1] E. J. Brody, *The topological classification of lens spaces,* Ann. of Math. (2), **71** (1960), 163–184.

[2] T. A. Chapman, *Topological invariance of Whitehead torsion,* Amer. J. Math., **96** (1974), 488–497.

[3] M. M. Cohen, *A Course in Simple-Homotopy Theory,* Springer-Verlag (1972).

[4] R. Fintushel and R. J. Stern, *Constructing lens spaces by surgery on knots,* Math. Z., **175** (1) (1980), 33–51.

[5] R. H. Fox, *Free differential calculus III,* Ann. of Math. (2), **64** (1956), 407–419.

[6] W. Franz, *Über die Torsion einer Überdeckung,* J. Reine Angew. Math., **173** (1935), 245–254.

[7] H. Goda and M. Teragaito, *Dehn surgeries on knots which yield lens spaces and genera of knots,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **129**, No.3 (2000), 501–515.

[8] C. McA. Gordon, *Dehn surgery and satellite knots,* Trans. Amer. Math. Soc., **275**, No.2 (1983), 687–708.

[9] E. Hironaka, *The Lehmer polynomial and pretzel links,* Canad. Math. Bull., **44** (4) (2001), 440–451.

[10] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth and Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries,* math.GT/0310164, (2003), 1–76.

[11] J. P. Mayberry and K. Murasugi, *Torsion-groups of abelian coverings of links,* Trans. Amer. Math. Soc., **271**, No.1 (1982), 143–173.

[12] J. W. Milnor, *A duality theorem for Reidemeister torsion,* Ann. of Math. (2), **76** (1962), 137–147.

[13] ———, *Whitehead torsion,* Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), 358–426.

[14] L. Moser, *Elementary surgery along a torus knot,* Pacific J. Math., **38** (1971), 737–745.

[15] P. Ozsváth and Z. Szabó, *On knot Floer homology and lens space surgeries,* math.GT/0303017, (2003), 1–23.

[16] J. Porti, *Mayberry-Murasugi's formula for links in homology 3-spheres,* math.GT/036181.

[17] J. H. Przytycki and A. Yasuhara, *Symmetry of links and classification of lens spaces,* (2000).

[18] K. Reidemeister, *Homotopieringe und Linsenräume,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **11** (1935), 102–109.

[19] D. Rolfsen, *Knots and links,* Publish or Perish, Inc. (1976).

[20] T. Sakai, *Reidemeister torsion of a homology lens space,* Kobe J. Math., **1** (1984), 47–50.

[21] M. Shimozawa, *Dehn surgery on torus knots,* Master Thesis (in Japanese), Osaka City University (2004).

[22] V. G. Turaev, *Reidemeister torsion and the Alexander polynomial,* Math. USSR-Sbornik, **30** (1976), 221–237.

[23] ———, *Reidemeister torsion in knot theory,* Russian Math. Surveys, **41-1** (1986), 119–182.

[24] ———, *Introduction to Combinatorial Torsions,* Birkhäuser Verlag (2001).

[25] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups,* Topology, **33**, No.2 (1994), 241–256.